

定常ランダムな支持剛性の変動を有する Winkler ばりの分岐座屈荷重期待値

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員 ○伊與部 匠
新潟大学工学部 正会員 阿部 和久

1 はじめに

鉄道におけるロングレール軌道は、振動・騒音の低減に優れる一方、レールに締結されたまくらぎを介してバラスト道床に拘束されることで、その中央部に温度変化に伴うレール伸縮を許容しない不動区間が存在するため、夏季のような高温時には、大きな圧縮軸力が作用して座屈に至る危険性が高まる。したがって、その発生を防止するための適切な座屈管理と対策が重要な課題である¹⁾。

軌道座屈強度は、初期通り変位、道床横抵抗力、レール中立温度に起因するレール軸力の空間変動に大きく依存する。このため、従来から精緻な数値モデルを用いた座屈解析を通して、これらの要因が座屈強度に及ぼす影響について詳細に検討されてきた。

しかし、これに対して、軌道に内在する各種不整が座屈強度に及ぼす影響についての理論的検討は必ずしも十分ではない。その際には、軌道系を連続支持されたはりで表現した比較的簡易な数値モデルの適用が可能である。とりわけ摂動法は、様々な不整や小さな擾乱が存在する場合の座屈挙動の把握に有効な手法であり、座屈強度のパラメータ依存性を評価することが可能となる。

Amazigo ら²⁾は、軟化型非線形 Winkler 基礎上の無限長ばりを対象に、定常ランダムな初期たわみ存在下での飛び移り座屈の評価を摂動法に基づき行い、初期たわみの標準偏差に対する初期不整鋭敏性を明らかにしている。また阿部・浜崎³⁾は、定常ランダムな初期たわみと軸力変動を同時に考慮した飛び移り座屈荷重期待値の摂動解を導出した。さらに、阿部・宮西⁴⁾は当該式を修正し、定常ランダムな軸力変動のみを考慮した分岐座屈荷重期待値の評価を行った。

このように、Winkler 基礎上の無限長ばりを対象にした初期たわみや軸力の空間変動についての理論的検討が進められてきた一方で、支持剛性（道床横抵抗力）の空間変動が座屈挙動に及ぼす影響は十分に明らかにされていない。そこで本研究では、従来の研究で未検討であった支持剛性の変動に着目し、その空間変動が分岐座屈挙動に及ぼす影響を理論的に検討する。具体的には、Winkler 基礎上無限長ばりに対して摂動法を適用し、分岐座屈荷重期待値の近似評価式を導出する。さらに、固有値問題による数値解析結

果との比較を通じて、導出した評価式の妥当性を検証する。

2 対象とする問題

支持剛性が軟化型 3 次非線形弾性を有する Winkler 基礎上無限長ばりを考える。初期たわみ存在下で支持剛性が空間変動する場合のはりのつり合い式は次式で与えられる。

$$EI \frac{d^4 W}{dX^4} + N \frac{d^2}{dX^2} (W + W_0) + (1 + \mu g(X))(k_1 W - k_3 W^3) = 0 \quad (1)$$

ここで、 X ははりの軸方向座標、 W は弾性たわみ、 N ははりの軸方向に作用する圧縮力、 EI ははりの曲げ剛性、 k_1 、 k_3 は Winkler 基礎剛性に関する係数である。また、 $g(X)$ は支持剛性の変動成分を与える関数、 μ はその振幅パラメータである。なお、初期たわみ波形を与える関数を W_0 とし、本研究ではまず飛び移り座屈を評価し、その後初期たわみをゼロとすることで分岐座屈荷重を求める。

次に以下の様な変数変換を導入する。

$$X = \left(\frac{EI}{k_1} \right)^{1/4} x, \quad W = \sqrt{\frac{k_1}{k_3}} w, \\ W_0 = \epsilon \sqrt{\frac{k_1}{k_3}} w_0, \quad N = 2\sqrt{k_1 EI} \nu \quad (2)$$

ここで、 ϵ は初期たわみの振幅パラメータ、 ν は軸力パラメータである。式 (2) を式 (1) に代入すると、無次元化されたつり合い式を得る。

$$w'''' + 2\nu w'' + (1 + \mu g)(w - w^3) = -2\nu \epsilon w_0'' \quad (3)$$

ここで、 $(\cdot)' = d(\cdot)/dx$ である。

式 (3) に対応する完全系 ($\mu = 0, \epsilon = 0$) の分岐座屈荷重パラメータ ν_{cr} は 1 であり、分岐座屈モードは波数が 1 の調和波形で与えられる。

3 支持剛性が単色変動する場合の統一評価式

3.1 初期たわみ存在下における飛び移り座屈荷重評価式

本節では、まず式 (3) における w_0 が分岐座屈モードで与えられ、支持剛性の変動関数 $g(x)$ が次式に示す波数 k の周期関数で与えられる場合について考える。

$$g = \cos \kappa x, \quad w_0 = \sin \xi \quad (4)$$

なお、本節における飛び移り座屈荷重パラメータ $\bar{\nu}$ の導出手法および手順の詳細は、文献³⁾に示されているため、以下ではその要点と主要な結果式を示す。

次の摂動展開を導入する。

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m w_m, & w_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_{mk}, \\ \nu\epsilon &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m B_m, & B_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k B_{mk}, & w_{10} &= \sin \xi \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 δ は w の振幅に関するパラメータ、 $w_{mn}(x)$ と B_{mn} は展開関数および展開係数である。これらの未知量は、式(4)を式(3)に代入して、摂動法に基づき $\delta^{k+1}\mu^m$ ($k, m = 0, 1, 2, \dots$) の各次数の項ごとに方程式を順次解くことで求めることができる。その結果を次式に示す。

$$\begin{aligned} \nu\epsilon &\approx \delta \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{8} \left[\frac{1}{Z(\kappa+1)} + \frac{1}{Z(\kappa-1)} \right] - \nu \right\} - \frac{3}{8}\delta^3 \\ Z(a) &= a^4 - 2\nu a^2 + 1 \approx (a^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)の $Z(\kappa+1), Z(\kappa-1)$ には ν が含まれているため、 $Z(a) \approx (a^2 - 1)^2$ と近似した。さらに、飛び移り座屈条件 $\partial\nu/\partial\delta = 0$ を課すことにより、飛び移り座屈荷重パラメータ $\bar{\nu}$ に対して次式を得る。

$$\bar{\nu} \approx 1 - \frac{\mu^2}{8} \left[\frac{1}{\{(\kappa+1)^2 - 1\}^2} + \frac{1}{\{(\kappa-1)^2 - 1\}^2} \right] - \left(\frac{9}{4\sqrt{2}}\epsilon \right)^{2/3} \quad (7)$$

式(4)で $\kappa > 0$ とすると、右辺第二項目における分母の $(\kappa-1)^2 - 1$ が $\kappa = 2$ としたときにゼロとなり、 $\bar{\nu}$ が評価不能となる。そのため、 $\kappa = 2$ の場合について別途次の評価式を導出した。

$$\bar{\nu} \approx 1 - \frac{\mu}{4} - \left(\frac{9}{4\sqrt{2}}\epsilon \right)^{2/3} \quad (8)$$

3.2 評価式の修正

式(7)の導出では、 $Z(\kappa \pm 1) \approx \{(\kappa \pm 1)^2 - 1\}^2$ とした。ここで以下では、上述の近似を行わず、初期たわみが存在しない場合における分岐座屈荷重評価式を求める。式(7)において、 $\epsilon \neq 0$ の下で両辺を δ について微分して飛び移り座屈条件を課すと、次式を得る。

$$1 - \frac{\mu^2}{8} \left\{ \frac{1}{Z(\kappa+1)} + \frac{1}{Z(\kappa-1)} \right\} - \nu - \frac{9}{8}\delta^2 = 0 \quad (9)$$

また、式(6)で $\epsilon = 0$ とすると、 δ を得る。よって、 $\epsilon \approx 0$ の時、式(9)より、分岐座屈荷重パラメータ ν_{cr} に対して次式を得る。

$$1 - \nu_{cr} = \frac{\mu^2}{8} \left\{ \frac{1}{Z(\kappa+1)} + \frac{1}{Z(\kappa-1)} \right\} \quad (10)$$

$Z(\kappa-1)$ で、 $\kappa = 2$ とすると、 $Z(1) = 2(1-\nu)$ となり、式(10)の右辺第二項が無限大とならずに成り立つ。ここで、

式(10)で $1 - \nu_{cr}$ を $\Delta > 0$ と置いて式を整理すると、 Δ に関する3次方程式が得られる。このとき、 $\Delta \ll 1, \mu \ll 1$ として、 $\Delta^3, \mu^2\Delta$ の項を無視すると、次の2次方程式を得る。

$$\begin{aligned} 2a\Delta^2 + b\Delta - \frac{\mu^2}{8}c &= 0 \\ a &= (\kappa+1)^2\{(\kappa-1)^2 - 1\}^2 + (\kappa-1)^2\{(\kappa+1)^2 - 1\}^2 \\ b &= \{(\kappa+1)^2 - 1\}^2\{(\kappa-1)^2 - 1\}^2 \\ c &= \{(\kappa-1)^2 - 1\}^2 + \{(\kappa+1)^2 - 1\}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)を Δ について解くと、 ν_{cr} は次式で与えられる。

$$\nu_{cr} = 1 - \frac{1}{4a}(-b + \sqrt{b^2 + \mu^2ac}) \quad (12)$$

$\kappa = 2$ とすると、式(8)で $\epsilon = 0$ とした式に一致する。また、 $\kappa \neq 2$ とすると、 $b^2 \gg \mu^2a^2$ となり、 $\Delta \approx \mu^2c/8b$ と近似でき、これは式(7)で $\epsilon = 0$ とした式を与える。以上より、 κ の値に依らない分岐座屈荷重評価式を導出した。

3.3 妥当性の検証

初期たわみが存在しない問題を対象に、分岐座屈荷重パラメータを固有値問題の数値解と比較して、式(12)の妥当性を確認する。固有値解析は文献⁴⁾と同様の手法を用いる。固有値解析結果と、式(12)の結果を図1に示す。式(12)では、波長 l が5を超えるあたりから $\kappa \approx 1$ における ν_{cr} の低下を捉えられておらず、それ以降の精度の低下が見られる。この挙動を表現するためには、摂動展開における項数を μ^4 まで求める必要があり、 $1 - \nu_{cr} = \Delta$ の4次方程式を解くことは代数的に非常に複雑で、実用的に困難である。しかし、 ν_{cr} が大きく低下する $\kappa = 2$ 近傍では概ね良好に評価されており、分岐座屈荷重を評価する上で式(12)は十分な精度を有するといえる。

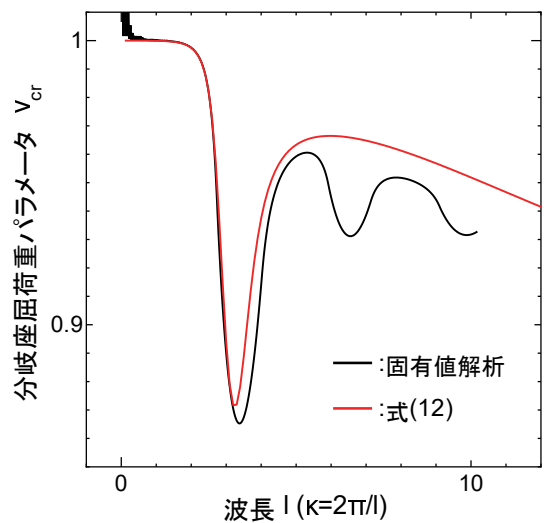


図1: 波数 κ と分岐座屈荷重パラメータ ν_{cr} との関係

4 定常ランダムな変動を有する支持剛性の分岐座屈荷重期待値

式(3)における $g(x)$ を、期待値 0、標準偏差 1 の所定の自己相関をもつ定常ランダムな波形として考える。まず、任意の初期たわみ波形 w_ϵ 存在下における次の問題を考える。

$$w'''' + 2\nu w'' + (1 + \sigma_g g)(w - w^3) = -2\nu \epsilon w''_\epsilon \quad (13)$$

ここで、標準偏差 σ_g は、式(3)における振幅パラメータである。前節をもとに、式(5)と同様な摂動展開を適用する。

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_w^m w_m, & w_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_g^k w_{mk}, \\ \nu \epsilon &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_w^m B_m, & B_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_g^k B_{mk} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで σ_w はたわみ w の標準偏差である。 w_{10} は式(5)と同様に $\sin \xi$ で与える。式(14)に飛び移り座屈条件を課し、 $\epsilon \rightarrow 0$ より与えられる条件から次の分岐座屈条件式を得る。

$$B_1 = B_{10} + \sigma_g B_{11} + \dots = 0 \quad (15)$$

よって、 ν_{cr} を求めるために、 $B_{1j}(j = 0, 1, \dots)$ を求める必要がある。そこで、式(14)について、摂動法に基づき $\sigma_w \sigma_g^k (k = 0, 1, \dots)$ 毎の式より w_{1n} と B_{1n} を順次解くことで求める。なお、本節における分岐座屈荷重パラメータの導出は、文献⁴⁾と同様の手法により行うため、以下では要点となる式および主要な結果式を示す。

ランダムな支持剛性の変動成分 $g_l(x)$ を有限長領域 $(-l, l)$ で定義し、次のようなフーリエ級数で与える。

$$\begin{aligned} g_l(x) &= \frac{\Delta k}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n e^{ik_n x}, & \hat{g}_n &= \int_{-l}^l g_l(x) e^{-ik_n x} dx, \\ k_n &= n\Delta k, & l &= N\pi, & \Delta k &= \frac{\pi}{l} = \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (16)$$

l は $N\pi$ (N は正の整数) で与え、 $l \rightarrow \infty$ とすることで無限長の解を求める。同様に、 $w_{1j}(x)$ を次式により与える。

$$w_{1j}(x) = \frac{\Delta k}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{w}_{1j,n} e^{ik_n x}, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (17)$$

式(14)、式(16)、式(17)を式(13)に代入し、順次未知係数を求めると、 B_{12} までの係数は以下の様に定まる。

$$\begin{aligned} B_{10} &= 1 - \nu, & B_{11} &= -\frac{\Delta k}{8\pi} (\hat{g}_{2N} + \bar{\hat{g}}_{2N}), \\ B_{12} &= -\frac{1}{2} \frac{f(1)}{2l} \frac{1}{2\sqrt{2(1-\nu)}}, \\ f(1) &= |\hat{g}(0)|^2 + |\hat{g}(2)|^2 + \hat{g}(0) (\hat{g}(2) + \bar{\hat{g}}(2)) \end{aligned} \quad (18)$$

ここで $(\bar{\cdot})$ は複素共役を表す。 B_{11} は $l \rightarrow \infty$ の極限においてゼロとなる。よって、式(15)より分岐座屈荷重パラメータ ν_{cr} に対して次式を得る。

$$(1 - \nu_{cr})^{3/2} = \frac{\sigma_g^2}{2^{5/2}} \frac{f(1)}{2l} \quad (19)$$

式(18)の $f(1)$ に含まれる $|\hat{g}(k)|^2$ は $l \rightarrow \infty$ の過程で次の関係を持つ。

$$S_g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\xi) e^{-ik\xi} d\xi = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|\hat{g}(k)|^2}{2l} \quad (20)$$

ここで、 S_g, R_g はそれぞれ $g(x)$ のパワースペクトル密度 (PSD) および自己相関関数である。 $\hat{g}(k-1)\hat{g}(k+1)$ の g に関する期待値は、 $l = N\pi$ であるためゼロとなる。また、式(19)における $1 - \nu_{cr} = \Delta$ の確率密度関数はガンマ分布で概ね近似できる⁴⁾ことから、 $\Delta^{3/2}$ の期待値は次式で与えられる。

$$E_g[\Delta^{3/2}] \approx (E_g[\Delta])^{3/2} \quad (21)$$

ここで、 $E_g(\cdot)$ は g に関する期待値である。すると、最終的に分岐座屈荷重パラメータの期待値 $E_g[\nu_{cr}]$ に対して次の評価式を得る。

$$E_g[\nu_{cr}] \approx 1 - \frac{\sigma_g^{4/3}}{2^{5/3}} \{S_g(0) + S_g(2)\}^{2/3} \quad (22)$$

式(22)より、支持剛性の空間変動によって分岐座屈荷重低下量は $4/3$ 乗に比例しており、これに対し鋭敏性を有していないことがわかる。

5 解析による妥当性の検証

5.1 解析手法および解析条件

式(14)における分岐座屈荷重パラメータ ν_{cr} について、分岐座屈解析では、座屈発生直後における支持剛性の非線形性は影響しないため、線形剛性を有する問題として取り扱う。分岐座屈発生時のたわみモード波形を式(17)と同様に次式のように展開する。

$$w(x) = \frac{\Delta k}{2\pi} \sum_n \hat{w}_n e^{ik_n x} \quad (23)$$

式(23)を、式(14)から w^3 の項および右辺の項を除いた式に代入すると、次の固有値問題を得る。

$$\left(k_n^2 + \frac{1}{k_n^2}\right) \hat{w}'_n - \frac{\sigma_g}{2l} \sum_m \frac{1}{k_n k_m} \hat{g}_{n-m} \hat{w}'_m = 2\nu_{cr} \hat{w}'_n \quad (n, m \neq 0) \quad (24)$$

式(16)の $g_l(x)$ が所定の自己相関に従う定常ランダム波形を与えるように、式(24)の $\hat{g}_n$ をランダムに生成し、固有値 ν_{cr} を数値的に求めるモンテカルロシミュレーション (MCS) を実施する。

そこで、 $g_l(x)$ の自己相関関数 R_g が次式で与えられている場合について考える．

$$R_g(x) = e^{-|x|/d} \quad (25)$$

ここで、 d は相関長を特徴づけるパラメータである．また、式 (25) に対応する PSD は次式で与えられる．

$$S_g(k) = \frac{2d}{1 + d^2 k^2} \quad (26)$$

式 (24) における固有値解析では、有限長区間を十分に大きく取り無限長とみなすため、 $l = N\pi$ ($N \geq 200$) と設定して、展開項数を $\pm 2N$ 項で打ち切った．相関長を $d = 10$ と固定し、軌道長を $N = 200, 300, 500, 1000$ の 4 ケースとした上で、 σ_g を 0.01 から 0.15 の範囲で変化させた．各条件について 10000 ケースの MCS を実施した．

5.2 解析結果

支持剛性の変動成分の標準偏差 σ_g と、分岐座屈荷重パラメータ低下量の期待値 $1 - E_g[\nu_{cr}]$ との関係を図 2 に示す．比較のため、式 (22) による近似評価式と、式 (24) に基づく MCS の結果を併せて図示した．MCS の結果から、いずれの σ_g に対しても、軌道長の増加に伴い $1 - E_g[\nu_{cr}]$ の値が近似評価式に漸近する傾向が確認された．また、 σ_g の増加に伴い、その依存度を示す傾きの次数が、式 (22) で得られた値 ($4/3 = 1.333\cdots$) に比べてわずかに低下し、さらに軌道長の増加とともに全体的な傾きも減少する傾向が見られた．軌道長が大きい場合には、 $1 - E_g[\nu_{cr}]$ の値が近似評価式の値をわずかに上回る傾向が見られるものの、MCS の結果と近似評価式の間には概ね良好な対応関係が認められる．したがって、式 (22) による分岐座屈荷重パラメータ期待値の評価は、十分な妥当性を有するといえる．

6 おわりに

本研究では、定常ランダムな支持剛性の変動を有する無限長 Winkler 基礎上はりを対象として、その分岐座屈荷重の期待値を理論的に導出した．はじめに、一定波長の初期たわみを仮定し、支持剛性が周期的に変動する場合に生じる飛び移り座屈荷重に基づき、初期たわみをゼロとしたときの値から分岐座屈荷重の評価式を導出した．この過程において、はりのたわみのつり合い方程式をもとに、たわみ関数および座屈荷重パラメータと初期たわみ振幅との積に対して摂動展開を適用した．さらに、得られた摂動展開式を、所定の波形をもつ初期たわみおよび定常ランダムな支持剛性の変動を考慮した系の飛び移り座屈問題に適用し、分岐座屈荷重パラメータ期待値の近似評価式を導出した．その結果、分岐座屈荷重の期待値は、支持剛性変動の標準

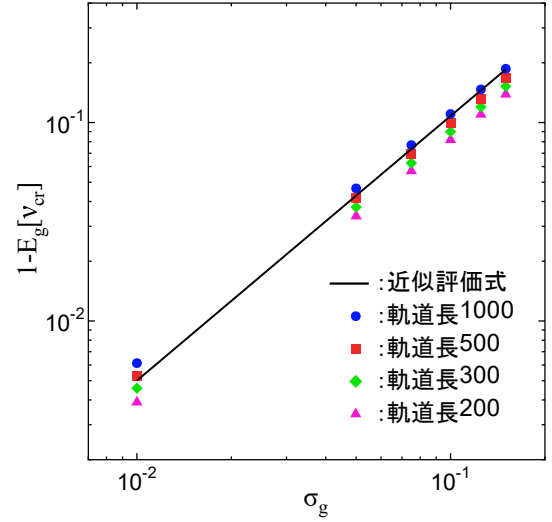


図 2: σ_g と分岐座屈荷重パラメータ低下量の期待値 $1 - E_g[\nu_{cr}]$ との関係

偏差 σ_g の $4/3$ 乗に比例することを明らかにした．あわせて、固有値問題に基づく数値解析を MCS により実施し、導出した近似評価式との比較を行った．解析では、標準偏差 σ_g の値を変化させ、軌道長を順次拡大して評価を行った．その結果、MCS により得られた σ_g のべき指数は理論値 $4/3$ よりわずかに小さい傾向を示したが、全体としては導出した評価式と良好な一致を示し、当該式の妥当性が確認された．

参考文献

- 1) 鉄道総合技術研究所 編：鉄道構造物等設計標準・同解説 軌道構造，11 章 ロングレール，丸善出版，2021．
- 2) Amazigo, J.C., Budiansky, B. and Carrier, G.F.: Asymptotic analyses of the buckling of imperfect columns on nonlinear elastic foundations, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.6, pp.1341-1356, 1970.
- 3) 阿部和久，浜崎颯太：初期たわみと軸力変動が非線形 Winkler 基礎上はりの座屈特性に及ぼす影響，計算数理工学論文集，Vol.23, pp.49-58, 2023.
- 4) 阿部和久，宮西健午：ランダムな軸力変動を受ける弾性支持はりの分岐座屈荷重期待値，計算数理工学論文集，Vol.24, pp.11-18, 2024.