

鉄道軌道-複数車輪連成系における共振増幅条件

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員 ○奥村 天晴
新潟大学工学部 正会員 阿部 和久

1 はじめに

鉄道軌道には、主にパラメータ起因の振動とレール凹凸起因の振動が存在する。後者の中でもレールと車輪との動的連成による振動は、レール凹凸の成長を促進する主要因の一つであり、結果として更なる振動や騒音の発生につながる可能性がある。

周波数域での観測により、鉄道軌道には異なる発生要因に起因する複数の共振周波数が存在することが明らかにされてきた。中でも 400-1000 Hz 程度の帯域では、車輪間で生じる波動の重複反射の影響により、複数車輪走行時に複数の共振が現れることが確認されている⁽¹⁾。Lei ら⁽²⁾は、この共振は、車輪間での伝播・反射に伴う波動の総位相変化が 2π の整数倍となるときに生じると指摘している。

さらに近年の研究では、共振が特定の周波数近傍で増幅されることが指摘されている。Lei ら⁽²⁾は、車輪で全反射が生じる場合、反射によるエネルギー損失がなく、これにより共振が増幅されることを指摘した。一方 Guan ら⁽³⁾は、車輪-軌道連成系における接触力の関係式に基づき、共振周波数において単一車輪-軌道系の特性方程式の実部がゼロになるとき、共振時の接触力が著しく増大することを示唆した。同著者らはこれを疑似共振周波数と定義しており、これは接触力の式における分母の実部がゼロになる周波数としても解釈できる。

両者は共振を増幅させる特定の周波数の存在について、一見異なる見解を示しているが、Guan らの疑似共振は本質的には全反射であるものと思われる。そこで本研究では、これらが同一の現象であることを理論的に示すことを目的とする。また、全反射と共振同時発生時のレールと車輪との接触力についても検討する。

2 軌道のモデル化と分散特性

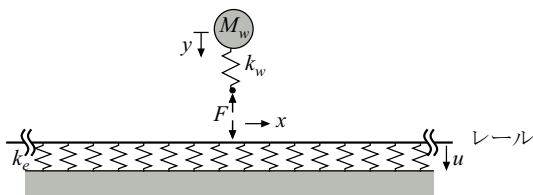


図-1 軌道-車輪連成モデル

Fig.1 の軌道-車輪連成系を考える。レールは Winkler 基礎上の無限長 Timoshenko ばりでモデル化し、単位長さ当りの支持剛性を k_e とする。車輪は質点 M_w で与え、車輪とレールの接触力はバネ k_w の作用力によって表現する。

無車輪状態のレールの運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} GAK \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_e u &= 0 \\ GAK \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $u(x, t)$ はレール鉛直方向変位、 $\psi(x, t)$ はレールの断面回転角、 G は弾性係数、 K はせん断係数、 E はヤング率、 ρ は密度、 A は断面積、 I は断面二次モーメントである。

角周波数 ω の下での運動方程式において、解を $\hat{u} = \tilde{u}e^{-i\kappa x}$ 、 $\hat{\psi} = \tilde{\psi}e^{-i\kappa x}$ と仮定する。ここで、 $\tilde{u}$ 、 $\tilde{\psi}$ は任意振幅、 κ は波数である。時間因子は $e^{i\omega t}$ で与える。

波動モードの波数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{\frac{1}{2\alpha} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right)} \\ \alpha &= GAK EI, \quad \beta = -(GAK \rho I + \rho AEI) \omega^2 + EI k_e, \\ \gamma &= \rho A \rho I \omega^4 - (GAK \rho A + \rho I k_e) \omega^2 + GAK k_e \end{aligned} \quad (2)$$

κ は ω によって複素数値をとるが、全反射および共振が発生する 400Hz 以上の周波数帯においては、根号中の符号により実数もしくは純虚数となる。そこで、実数となるものを κ_1 、純虚数となるものを κ_2 とすると、伝播モードの波数は κ_1 、エバネッセントモードの波数は κ_2 で与えられる。

3 全反射条件

Fig.1 において車輪位置を原点とし、車輪に対し無限遠から波動が伝播してくる際の反射・透過を考える。入射波、反射波、透過波を $\hat{u}_I$ 、 $\hat{u}_R$ 、 $\hat{u}_T$ とすると、それらは κ_1 、 κ_2 のモードの重ね合わせとして次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_I(x) &= e^{-i\kappa_1 x}, \\ \hat{u}_R(x) &= A_R e^{i\kappa_1 x} + B_R e^{-i\kappa_2 x}, \\ \hat{u}_T(x) &= A_T e^{-i\kappa_1 x} + B_T e^{i\kappa_2 x} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、入射波の振幅は 1 としている。また、反射波及び透過波の振幅を A_R 、 B_R 、 A_T 、 B_T とする。

車輪・接触バネ系の等価剛性は次式で与えられる。

$$k_s = \frac{\omega^2 M_w k_w}{k_w - \omega^2 M_w} \quad (4)$$

変位および断面回転角の適合条件, 車輪位置における鉛直方向およびモーメントのつり合い条件から A_T を決定すると次式で与えられる.

$$A_T = \left\{ -1 + \frac{2iGAK}{k_s}(\kappa_1 - N\kappa_2) + N \right\}^{-1} + 1 \quad (5)$$

$$N = N_1/N_2, \quad N_i = \frac{GAK\kappa_i}{\rho I\omega^2 - GAK - EI\kappa_i^2}, \quad (i = 1, 2)$$

全反射が生じるとき, 透過波の振幅 $A_T = 0$ であるため, 全反射条件は次式で与えられる.

$$2iGAK(\kappa_1 - N\kappa_2) - k_s N = 0 \quad (6)$$

4 疑似共振条件

Fig.1 で, 車輪を角周波数 ω で単位調和加振した際の接触力の式の分母の実部がゼロとなる条件を考える. 車輪の左右に伝播する波動 $\hat{u}_l, \hat{u}_r$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \hat{u}_l &= A_l e^{i\kappa_1 x} + B_l e^{-i\kappa_2 x}, \\ \hat{u}_r &= A_r e^{-i\kappa_1 x} + B_r e^{i\kappa_2 x} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, A_l, B_l, A_r, B_r は振幅である. また周波数領域において接触力を $\hat{F}$ とすると, M_w に関する運動方程式および, 接触点の力のつり合い式はそれぞれ次式で与えられる.

$$\begin{aligned} -M_w \omega^2 \hat{y} + k_w (\hat{y} - \hat{u}(0)) - 1 &= 0, \\ k_w (\hat{u}(0) - \hat{y}) + \hat{F} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, $\hat{y}$ は車輪の鉛直変位である.

変位の適合条件, 対称性による断面回転角ゼロの条件, 鉛直方向のつり合い条件から振幅を決定し, 式 (8) に代入して接触力について解くと次式で与えられる.

$$\hat{F} = \frac{k_s}{\omega^2 M_w} \left\{ \frac{1}{k_s} - \frac{1+N}{2iGAK(\kappa_1 - N\kappa_2)} \right\}^{-1} \quad (9)$$

Guan ら⁽³⁾ の疑似共振条件は接触力の分母の実部がゼロとなる条件であり, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_s} - \frac{N}{2iGAK(\kappa_1 - N\kappa_2)} &= 0, \\ \therefore 2iGAK(\kappa_1 - N\kappa_2) - k_s N &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

これは全反射条件式 (6) と一致している. 従って, Guan らの疑似共振条件は全反射条件に一致する.

5 全反射と共振同時発生時の接触力

全反射と共振同時発生時の接触力について検討する. そこで, Fig.2 の様な一定波長凹凸を有するレール上を 2 車輪が走行する問題を考える. 左車輪を原点とし, 軸距は L とする. レール凹凸は振幅 1, 波長 λ とし, 車輪走行を一定速度 v で移動する凹凸で近似する. 移動レール凹凸 $V(x, t)$ を次式で与える.

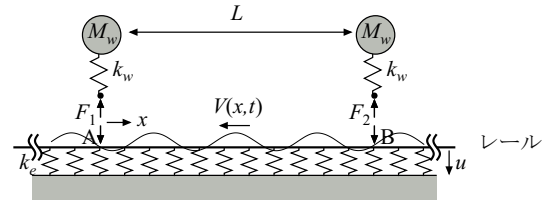


図-2 凹凸移動を考慮した 2 車輪モデル

$$r(x, t) = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(x+Vt)} \quad (11)$$

左右車輪とレールの接触力を $\hat{F}_1, \hat{F}_2$ とすると, それらは次の関係式を満たす.

$$\begin{bmatrix} k_s \alpha_{AA} - 1 & k_s \alpha_{AB} \\ k_s \alpha_{AB} & k_s \alpha_{AA} - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = k_s \begin{Bmatrix} 1 \\ e^{-i\frac{2L\pi}{\lambda}} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここで, α_{AB} は B 点を加振した際の A 点のリセプタンスである. 式 (12) の行列式 $\det \alpha$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \det \alpha &= \Delta_1 \cdot \Delta_2, \\ \Delta_1 &= k_s(\alpha_{AA} + \alpha_{AB}) - 1, \quad \Delta_2 = k_s(\alpha_{AA} - \alpha_{AB}) - 1 \end{aligned} \quad (13)$$

他車輪からのエバネッセント波を無視すると, Δ_1, Δ_2 は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\approx k_s \frac{1}{2iGAK(\kappa_1 - N\kappa_2)} (1 + N + e^{-i\kappa_1 L}) - 1 \\ \Delta_2 &\approx k_s \frac{1}{2iGAK(\kappa_1 - N\kappa_2)} (1 + N - e^{-i\kappa_1 L}) - 1 \end{aligned} \quad (14)$$

全反射条件 (6) を満たすとき, 次式が成り立つ.

$$\Delta_1 = -\frac{1}{N} (1 + e^{-i\kappa_1 L}), \quad \Delta_2 = -\frac{1}{N} (1 - e^{-i\kappa_1 L}) \quad (15)$$

加えて共振条件を満たすとき, $e^{-i\kappa_1 L} = \pm 1$ であるため, Δ_1, Δ_2 の一方はゼロとなる. このとき, 行列式 $\det \alpha$ はゼロとなり, F_1, F_2 は無限大に発散することが分かる.

6 おわりに

鉄道軌道と複数車輪との動的連成による共振を増幅させる現象として, Lei らが指摘する全反射と Guan らが指摘する疑似共振が同一の現象であることを理論的に示した. また, 凹凸を有するレール上を 2 車輪が走行する場合において, 共振と全反射同時発生時に接触力が極めて大きな値をとることを確認した.

参考文献

- 1) T.X. Wu, D.J. Thompson: Vibration analysis of railway track with multiple wheels on the rail, J. Sound Vib. 239 (2001) 69-97.
- 2) S. Lei, Y. Ge, Q. Li, D. Thompson: Wave interference in railway track due to multiple wheels, J. Sound Vib. 520 (2022), 116620.
- 3) Q. Guan, B. Liu, Z. Wen, X. Jin: Analysis of the resonance frequencies of multiple wheels-track coupled system based on the wave approach, J. Sound Vib. 568 (2024), 117956.