

# 浅水流方程式から得た時系列データからの偏微分方程式の抽出

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 ○齊藤 浩輝  
新潟大学災害・復興科学研究所 正会員 安田 浩保

## 1 はじめに

河川や浅海域の流体現象の数理解析には、水深方向の流速分布が一様であると仮定した浅水流方程式が用いられ、広範な適用性が認められている。浅水流方程式は、河川や浅海域の流体現象の水深方向の流速分布が一様であるとの仮定を設け、Navier-Stokes の方程式を水深方向に積分をして演繹的に導かれたものである。このため、浅水流方程式以外に河川や浅海域の流体現象を記述し得る方程式の存在は否定できない。

近年、さまざまな物理現象の観測ビッグデータが徐々に取得できるようになってきている。Rudy らは、そのような観測ビッグデータから構成される高次元行列より、そのビッグデータが内包する物理を記述し得る方程式を抽出する方法を構築している<sup>1)</sup>。彼らはさまざまな流体現象に関係する微分方程式をこの方法を用いて抽出できるとしている (PDE-FIND 法)。現在のところ、河川や浅海域の流れに用いられる浅水流方程式への適用事例はない。また、河川などの流体現象の観測ビッグデータが存在する場合、彼らの方法により、その流体現象を記述する既知の微分方程式以外の式形の方程式を抽出できる可能性がある。

本研究では、Rudy らの方法により、浅水域の流体現象より浅水流方程式の抽出ができるか否かと、浅水域の流体現象を記述し得る既知の微分方程式以外の式系の方程式を抽出できるかどうかを調べた。

## 2 PDE-FIND 法による方程式の抽出

Rudy らによって提案された PDE-FIND 法は、空間領域内の時系列測定によって得られた観測データから構成される高次元行列を入力データとして、その力学系を支配する偏微分方程式の項とその係数をスパース回帰法を用いて選択し出力するものである。

PDE-FIND 法では、式 (1) に示すような空間領域内の  $m$  個の観測点を  $n$  時間、時系列測定することによって得られた高次元行列  $\mathbf{U}$  を入力値とする。

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (u_n = [u^1, u^2, \dots, u^m]) \quad (1)$$

次に、与えられた  $\mathbf{U}$  に対して時間微分を行い、 $\vec{u}_t$  に変換す

る。また、式 (2) に示す辞書行列  $\Theta$  を構築する。ここで、得られた  $\vec{u}_t$  と  $\Theta$  を用いて  $\vec{u}_t = \Theta \vec{\xi}$  を満たすようなスパース回帰分析を考える。このとき、 $\Theta$  に含まれる  $\vec{u}_x$  や  $\vec{u}_{xx}$  は  $\mathbf{U}$  より求めたそれぞれ 1 階、2 階の空間微分値をベクトルに変換したものであり、出力される偏微分方程式の項の候補となる。3 階微分や 2 乗した項などを追加することで候補となる項を任意に変更できる。また、観測を行った力学系について既知量がある場合は  $\vec{\mu}$  のような形で  $\Theta$  に追加することが可能である。最後に、式 (3) に示すスパース回帰分析により、偏微分方程式の係数と項の選択を行う。求める  $\vec{\xi}$  はスパースな係数ベクトルであり、その要素はゼロか出力される偏微分方程式の項の係数となっている。 $\vec{\xi}$  に含まれる非ゼロの要素とそれに対応する  $\Theta$  の項を足し合わせたものが偏微分方程式として出力される。 $\vec{\xi}$  に含まれるゼロの要素とそれに対応する  $\Theta$  の項はゼロとなり出力されない。

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & | & | & | & | & | \\ \vdots & \vec{u} & \vec{u}_x & \vec{u}_{xx} & \dots & \mu & \dots \\ 1 & | & | & | & | & | \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\arg \min_{\vec{\xi}} \|\Theta \vec{\xi} - \vec{u}_t\|_2^2 + \lambda \|\vec{\xi}\|_0 \quad (3)$$

具体的な例として、速度  $c$  で移流する現象の時系列データ  $\mathbf{U}$  を入力値として、項の候補を 2 階微分までとしスパース回帰分析を行うと、 $\Theta$  と  $\vec{\xi}$  は式 (4) のようになり、出力される偏微分方程式は移流方程式  $u_t = -cu_x$  となる。

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & | & | & | \\ \vdots & \vec{u} & \vec{u}_x & \vec{u}_{xx} \\ 1 & | & | & | \end{pmatrix}, \vec{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

## 3 浅水流方程式の抽出

本研究では、浅海域の流体現象の解析に広く用いられている浅水流方程式による数値計算の結果から構成される時系列データを PDE-FIND 法に適用し、この時にどのような偏微分方程式が抽出されるのかを調べた。抽出された方程式と比較するため、PDE-FIND 法によって浅水流方程式が出力された場合の表記を式 (5) と式 (6) に示した。数値計算では、式 (5) と式 (6) に示す浅水流方程式を用い、

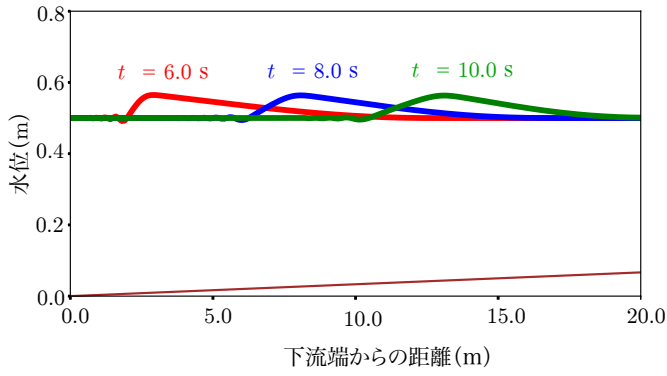


図-1: 河川を遡上する流れの3時刻の水深変化

1次元かつ非定常条件で河川を遡上する流れの計算を行った。ここで、水位  $H$  (m)、流量  $Q$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ )、水深  $h$  (m)、重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  である。

$$H_t = -1.0Q_x \quad (5)$$

$$Q_t = -1.0(Q^2/h)_x - 9.8hH_x \quad (6)$$

### 3.1 浅水方程式による時系列データの作成

浅水方程式はリープフロッグ法を用いて離散化を行った。初期水位を  $0.5 \text{ m}$  とし、非定常条件とするため下流端の水深を1ステップごとに  $h_n = h_{n-1} + 0.4 \sin(\pi n/25.0)$  から100ステップ目まで増加させた。また、上流端は反射境界条件としている。計算時間は0から  $20.0 \text{ s}$  で  $dt = 0.01 \text{ s}$ 、下流端から上流端までは  $20.0 \text{ m}$  で  $dx = 0.1 \text{ m}$ 、初期流量は  $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ 、底面勾配は  $1/300$  とした。

数値計算によって得られた水深のうち3時刻分のグラフを図-1に示す。赤線は  $t = 6.0 \text{ s}$ 、青線は  $t = 8.0 \text{ s}$ 、緑線は  $t = 10.0 \text{ s}$  での波形である。下流から上流に進むにつれ波の先端が切り立つ浅海域での流れの波形が再現されている。

### 3.2 時系列データからの抽出結果

数値計算によって得られた水位  $H$ 、流量  $Q$ 、水深  $h$  の時系列データを入力データとし、PDE-FINDによる偏微分方程式の抽出を行った。 $\Theta$  に含まれる項の微分階数は1階微分までとした。

式(7)と式(8)に抽出された偏微分方程式を示す。得られた式と式(5)と式(6)に示す浅水方程式とを比較すると、抽出された式と比較対象の浅水方程式の式形には類似性が認められるものの、式(7)の連続の式には  $Q_x$  が含まれておらず、4つの項の足し合わせで表されている。また、式(8)の運動の式を構成する移流項や圧力項が含まれておらず、2つの項の足し合わせで表されている。

$$H_t = -22.04hH_x + 20.11HH_x + 4.18hQ_x - 5.65HQ_x \quad (7)$$

$$Q_t = -14.08Q_x + 24.73HQ_x \quad (8)$$

式(9)と式(10)は、初期流量を  $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$  から  $0.6 \text{ m}^3/\text{s}$  に増やし、数値計算を行った時系列データから抽出された偏微分方程式である。式(7)と同様に浅水方程式とは異なる式となった。また、式(7)とは係数が異なり、式(8)には含まれない  $HH_x$  が含まれている。

$$H_t = -12.48hH_x + 11.57HH_x + 3.37hQ_x - 4.67HQ_x \quad (9)$$

$$Q_t = -4.90Q_x - 9.65HH_x + 7.72HQ_x \quad (10)$$

式(7)と式(8)の組み合わせと、式(9)と式(10)の組み合わせが式(5)と式(6)の浅水方程式と異なる明確な理由については不明である。このような差異が生じた理由の一つとしては、数値計算に由来する打ち切り誤差が考えられる。また、初期値によっても偏微分方程式が変化するため、計算条件や各項の振る舞い、寄与度などを考慮し、抽出される方程式を比較していく必要がある。

## 4 おわりに

本研究では、Rudyらによって提案された時系列データからスパース回帰分析を用いて偏微分方程式を抽出するPDE-FIND法を用いて、浅水域の流体现象より浅水方程式の抽出が可能であるか調べた。PDE-FIND法により抽出された偏微分方程式の式形は、比較対象の浅水方程式の式形との類似性が認められるものの、浅水方程式とは異なる式形のものであった。今後は、抽出された方程式の振る舞いや各項の寄与度などから浅水流を記述し得るかについて調べる予定である。

### 参考文献

- 1) Samuel H. Rudy, Steven L. Brunton, Joshua L. Proctor, J. Nathan Kutz, Data-Driven discovery of partial differential equations, *Sci Adv.* 3., 2017.