新潟大学大学院自然科学研究科 新潟大学工学部

阿部 和久

笠原 滉太

正会員

1 はじめに

軌道の動的応答特性の理解は,列車・軌道連成系に おける複雑な動的挙動の評価・予測の際の基礎的知見 として有用となる.

既往研究¹⁾では,軌道分散曲線と軌道振動モード特性に関する検討に加え,単位調和加振力が軌道上の観測点を通過した瞬間の加振点直下のレール定点振幅についての結果を得ており,まくらぎ支持点を節に持つピン-ピンモードの共振周波数近傍では荷重走行の有無が応答に大きく影響を及ぼすことを見出している.なお,これらがDoppler効果の影響によるものだと考えられる.しかし,レール上での定点観測における軌道からみたときの周波数応答特性についてまでは検討がなされていない.

そこで本研究では、一定速度で走行する単位調和加 振力に対する応答を対象に、定点で観測されるレール たわみ加速度 ESD の周波数特性について基礎的検討 を行う.以下では、まず先行研究²⁾に基づき、時間域 解析より、レールたわみの加速度エネルギースペクト ル密度 (ESD) は、パスバンド内では比較的大きな応 答の乱れが狭い周波数間隔で離散的に発生している様 子を確認する.次に、この周波数応答の変動原因につ いて検討する.具体的には、まず一定速度で走行する 単位調和加振力に対する周波数応答を解析的に導出す る.続いて、レールたわみ周波数応答に急変部が離散 的に分布することを示す.その後、解析解を構成する 各項の中で急変成分の原因となるものを特定し、当該 現象の発生機構などについて考察する.

2 レールたわみ加速度 ESD の解析例

2.1 解析条件

図-1 に示すような台車・無限長軌道連成系モデル を対象とする.一定速度 V で走行する台車は台車枠 と車輪間距離 (軸距) で配置された 2 車輪とで構成さ れている.また,レールは 50kgN レールを想定し,定 常ランダムなレール凹凸 r(x) を設けた離散支持され



図-1 台車・無限長軌道連成系モデル

た Timoshenko ばりにより与える.また,台車と軌道 に関する設定値を,それぞれ表-1と表-2に示す.

X-1 邦道に因りる政定恒			
まくらぎ質量	$M_s(\mathrm{kg})$	100.0	
軌道パッド剛性	$k_r(MN/m)$	800.0	
まくらぎ下パッド剛性	$k_r({ m MN/m})$	10.0	
軌道パッド減衰定数	$\eta_r({ m kN\cdot s/m})$	25.0	
まくらぎ下減衰定数	$\eta_s({ m kN}\cdot{ m s/m})$	10.0	
レール支持間隔	L(m)	0.6	

表-1 軌道に関する設定値

表-2 台車に関する設定値

台車枠質量	$M_b(\mathrm{kg})$	1500.0	
台車枠性モーメント	$I_b({ m kg}\cdot{ m m}^2)$	500.0	
軸ばね	$k_b({ m MN/m})$	1.0	
軸ダンパー	$\eta({ m kN}\cdot{ m s/m})$	40.0	
ばね下質量	$M_{\omega}(\mathrm{kg})$	600.0	
軸距	$x_{\omega}(\mathbf{m})$	2.1	
車輪・レール間接触ばね	$k_{\omega}(\text{GPa})$	1.5	

2.2 レールたわみ加速度 ESD

上述した解析条件に基づき, ランダムなレール凹凸 に対する走行台車・軌道連成応答を時間域解析より求 める.



図-2 レールたわみ加速度 ESD

レール加速度 ESD の解析結果を図-2 に示す. 図よ り,パスバンド内では, その間のストップバンドに比べ 比較的大きな応答の乱れが狭い周波数間隔で離散的に 発生している様子が確認できる. なお,ストップバン ド内にも 170Hz と 250Hz 付近の 2 箇所に応答のピー クが認められるが, パスバンド内の様に密な離散分布 とはなっていない.

3 走行調和加振力を受ける軌道のレールたわみ 応答の導出

図-3のレール定点振動応答について考える.



図-3 走行する単位調和加振力を受ける軌道

レールの運動方程式に Floquet 変換を適用し, 解を 級数展開すると、

$$\hat{u}(\tilde{x},\omega) = \sum_{m} u_{0n}(\kappa,\omega)e^{-iz_{m}\tilde{x}}(\kappa = \frac{\omega - \omega_{0}}{V}),$$

$$u_{0m}(\kappa,\omega) := \frac{1}{X_{0}V}(\delta_{0m} - \frac{1}{g \cdot X_{m}}),$$

$$X_{n}(\kappa,\omega) := GAKz_{n}^{2} - \rho A\omega^{2} + \frac{iGAKz_{n}^{2}}{GAK\rho I\omega^{2} + EIz_{n}^{2}}$$

$$g(\kappa,\omega) := \frac{L}{k_{e}} + \sum_{n} \frac{1}{X_{n}}, \quad z_{n} = \frac{2n\pi}{L} + \kappa$$
(1)

観測点 \hat{x} におけるレールたわみの周波数応答 \hat{u} は,式 (1)のように求めることができる.

ここで、 ω_0 は加振円振動数、 ω は円振動数、G, A, K, ρ , I, Eはそれぞれレールのせん断弾性係数、断 面積、せん断係数、質量密度、断面二次モーメント、 ヤング率である. また、 k_e はレール支持部の動的等価 剛性、 κ は Floquet 波数である.

ここで, $g(\kappa, \omega) = 0$ をみたす κ - ω 平面の点集合は軌 道の分散曲線を与える.

4 応答急変部の発生機構に関する検討

3. に述べた単位調和加振力に対する周波数応答を求めた. ここで、パッド類の減衰は loss factor により与え、その値を 0.2 とした. また、50kgN レールに関する 各種物性値は、GAK = 168.3MN、EI = 4.04MNm²、 $\rho A = 50.47$ kg/m、 $\rho I = 0.15$ kgm と設定した.

加振周波数 $f_0 = \omega_0/2\pi$ が 400Hz, 走行速度 V が 20m/s の場合の応答を式 (1) より求めたものを図-4 に示す.また, u_{0m} における共通項 $1/(VX_0)$ を青線 で示した.



図-4 まくらぎ区間中央におけるレールたわみ周波数応答 (加振周波数 400Hz, 走行速度 20m/s)

図−4 より,パスバンド周波数域内において応答の 急変箇所 (小さなピーク) が離散的に分布している様 子が確認できる.また本解析では加振周波数を 400Hz としているため,その付近に応答の主要部が位置して ,いる.一方で,ストップバンド内において急峻なピー クは発生していない.

式 (1) から, 青線で示した 1/(VX₀) の項が û の概 形を与え, 1/(gX_m) がそれに対する補正項に相当し ていることが窺える. さらに,共通項 $1/(VX_0)$ には加振周波数の前後2箇所以外に急峻なピークが存在していないことから, \hat{u} の急変部分には補正項にある X_m とgが関係していると考えられる.

4.1 X_m と g の挙動について

 X_m は、 ω_0 からまくらぎ通過振動数 $2V\pi/L$ の m 倍 を減じた円振動数で加振する走行速度 V の調和振動 荷重を受けるレール単体の振動応答に関係し、その走 行線 ($\omega = \omega_0 - 2mV\pi/L + V\kappa$ で与えられる直線) と レール自由振動モードの軌道分散曲線との交点におい てはゼロとなり、そこの波動モードが励起されると考 えられる.



図-5 $1/|g((\omega - \omega_0)/V, \omega)|$ の分布 (加振周波数 400Hz, 走 行速度 20m/s)

一方, gにはまくらぎ支持部の動的等価剛性 k_e が含まれているが, パッド類の伸縮運動は減衰を伴うため k_e は複素数で与えられ,g = 0をみたす実波数・実周波数のペアはパッド伸縮を伴わないピン-ピン共振点以外に存在しない.よって,当該周波数以外で g がゼロ となることはない.ただし,無減衰系における分散曲線の近傍で $g \approx 0$ となることが予想される.そこで, $1/|g((\omega - \omega_0)/V, \omega)|$ の分布を加振周波数 400Hz, 走行 速度 20m/s として求めたものを図-5 に示す.1/|g|に は特異性が存在しないものの,パスバンド内において 極大値を与えており,その前後の周波数域に比べ離散 的に大きな値をとっていることがわかる.

これらは,走行線と軌道分散曲線との交点において, gがゼロとなり,急峻なピークがペアで離散的に発生 したものであると推察できる.また,図-5のピーク群 は軌道分散曲線と走行線群との交点に対応し,応答急 変部を与えていると考えられる.

4.2 パスバンドにおける内 \hat{u} の挙動について

図-4 に認められる急変部が何に起因するものであ るのかを確認する目的で,式(1)の*m*に関する総和 を*m* = 1 の 1 項のみに置き換えた 1/(*Re*(*g*)*X*₁) を図 -6 に示す.



図-6 1/(*Re*(*g*)*X*₁)の周波数分布 (加振周波数 400Hz, 走行 速度 20m/s)

図-6より、359Hzと375.0Hzにピークが認められる.

4.3 ストップバンド内における û の挙動について

図-4 に示した \hat{u} のたわみ周波数応答では,ストッ プバンド内において急峻なピークが発生していない. 式 (1) の m に関する総和を m = 6 の 1 項のみに置き 換え, X_6 を例に, $1/(Re(g)X_6)$ の分布を図-7 に示す.



図-7 1/(*Re*(*g*)*X*₆)の周波数分布 (加振周波数 400Hz, 走行 速度 20m/s)

図-6 に認められた様な2つのピークを生じていな いことが確認できる.

4.4 応答急変部の発生原因について

図-6 のピークの発生原因について調べるために、 レール単体および軌道の分散曲線と、 X_1 , X_6 それぞ れに対応する走行線 $\omega = \omega_0 - 2m/L + V\kappa$ との関係 を図-8 に示す.



図-8 レール単体および軌道 (無減衰系)の分散曲線と走行線 (加振周波数 400Hz, 走行速度 20m/s)

X1は,走行線(赤線)とレール単体の分散曲線(黒線) との交点でゼロとなり、当該点の周波数は357.2Hzと 376.4Hzの2箇所で与えられるが、これらは図-6の ピーク周波数とは一致しない.一方,図-8における 走行線と軌道の分散曲線 (青線) との交点は 359Hz と 375Hz 付近の2箇所に位置しており、それらは図-5 の2つのピーク周波数と一致している. これらの交 点において 1/|g| は極大値をとり, 1/(gX₁) に顕著な ピークが発生したと理解することができる. これは 分散曲線上の当該箇所における波動モードの励起を 意味する. û の応答における離散的急変部は,これに 起因するものである.なお、急峻なピークが2つ現れ る原因は、図-8に示した傾きVの走行線と軌道分散 曲線との交点が2箇所に存在することによるもので あり、Doppler 効果として解釈することができる. 一 方, 図-6より, X₆は 200Hz から伸びる走行線 (緑線) とレール単体の分散曲線との交点である 193.2Hz と 207.0Hz でゼロとなる. これは分散曲線上の当該箇所 における波動モードの励起を意味する. û の応答にお ける離散的急変部は、これに起因するものである.

以上に述べたことは,式(1)に基づくと以下のように 説明づけることができる.走行線が軌道の分散曲線と 交差する周波数では $g \approx 0$ となり, u_{0m} における補正 項の絶対値は極大値をとる.特に,走行線上で $X_m = 0$ となる場合,走行線と軌道の分散曲線との2つの交点 で補正項 $1/(gX_m)$ の絶対値が大きな値を持つため,当 該周波数に顕著なピークが現れる.一方,ストップバ ンド内では,軌道の分散曲線が存在せず,1/|g|の極大 点に起因する応答の急変が発生していないものと考え られる.

5 おわりに

走行調和加振力を受ける軌道応答について,定点で 観測されるたわみの周波数応答特性について調べた. 解析例を通して,レールたわみ周波数応答に振幅の急 変部が離散的に分布する様子が認められた.その発生 機構について,加振周波数およびそこからまくらぎ通 過周波数の整数倍離れた周波数から伸びる走行線群 と,軌道の分散曲線との交点に対応する波動モードの 励起により,応答のピークが離散的に現れることがわ かった.なお,Doppler効果により,1つの走行線と分散 曲線との交点が2つ存在するため,当該ピークは2つ ずつ現れる.

参考文献

- Sheng, X., Li, M., Jones, C.J.C. and Thompson, D.J.: Using the Fourier-series approach to study interactions between moving wheels and a periodically supported rail, Journal of Sound and Vibration, Vol.303,pp.873-894, 2007.
- Yoshino, S., Abe, K. and Koro, K.: An analytic solution of mathematical expectation for bogie-track interaction problems, Bulletin of the JSME, Mechanical Enjineering Journal, Vol.10(3), No.22-00300, 2023.