

軌道座屈解析の計算効率向上のための軌道端境界設定法

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員 奥村 天晴
新潟大学工学部 正会員 阿部 和久

1 はじめに

ロングレールは軌道中央に伸縮がほぼ完全に拘束される不動区間を有する。当該区間では温度変化に伴って軸力が生じ、座屈の危険性が増すため適切な座屈対策が重要である。実軌道は通り変位等の不確定因子を有しており、本研究室ではそれらのバラツキを考慮した確率論的な温度座屈解析を行ってきた⁽¹⁻³⁾。ロングレール軌道は中央部の不動区間とその外側の可動区間とで構成される。座屈解析に際しては座屈の生じ得る不動区間のみを再現すればよく、軌道端を固定境界とすることでそれが可能である。しかし文献(1)~(3)では通り変位をランダムに与える都合上、軌道端を拘束することができないため、現実の軌道と同様に軌道端の変位を許容することで、不動区間と併せて可動区間も再現する解法を用いてきた。しかしながら、当該手法では不動区間のみでなく100m以上ある可動区間も再現する為、自ずと軌道長は長くなり、計算負荷は増大する。そこで本論文では、ランダムな通り変位設定下の座屈解析を対象に、飛び移り座屈温度を評価する際の計算効率の向上を図るための手法を提案する。具体的には、座屈発生のある領域より外側で軌道を打ち切り、本来そこに発生するレール断面力と等価な境界条件を設定する方法について検討する。

なお、同様の試みがLimら⁽⁴⁾によりなされている。文献(4)では、軌道中央部に所定の通り変位波形を設定した従来型の座屈解析を対象に、当該域からある程度離れた箇所まで軌道を打ち切り、不動区間内の半無限軌道と等価な弾性挙動を再現し得る軌道端境界要素を設定する手法を採っている。この方法を用いることで、軌道端を単に固定境界とする従来解析に比べて軌道長を大幅に短縮し得ることが示されている。

そこで本研究では、まずLimらと同様に半無限軌道と等価な剛性行列(半無限軌道モデル)の導入を試みる。ただし、本解析のように軌道全体にわたって初期通り変位を設定する場合、座屈発生域はある程度可動区間内にまで分布し得る。可動区間域では軌道長手方向に非弾性的な変位が発生しているため、上述の等価剛性の可動区間内への導入は適切なレール断面力を再現できず、ひいては飛び移り座屈解析結果に影響を及ぼすことが懸念される。

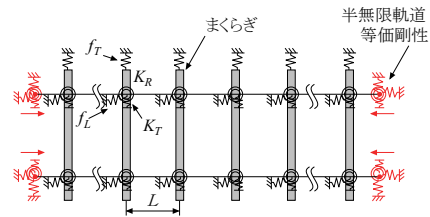


図-1 半無限軌道モデル

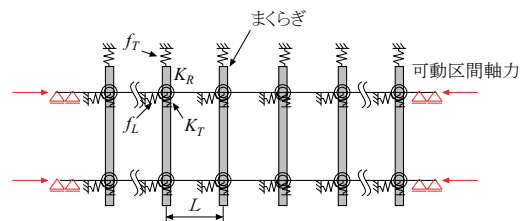


図-2 可動区間再現モデル

そこで次に、座屈発生のある領域より外側の可動区間内に打ち切り端を設ける手法(可動区間再現モデル)について検討する。なお、可動区間内での軌道ふく進は非弾性的な道床縦抵抗を伴う。そのためレール軸力の評価のためには、当該箇所の非線形な変位-軸力関係を求めておく必要があるが、この関係は非線形2階常微分方程式に帰着する。本研究では、非線形解を理論的に求めることで計算効率向上を図る。以降ではまず、これら二つのモデルを用いた解析手法の導出について述べる。続いて、これらの手法を用いた場合の飛び移り座屈温度等の解析結果と、可動区間も考慮した従来のモデルを用いた場合の解析結果とを比較し、提案法の妥当性について検討する。最後に本手法の適用による計算時間を求め、本手法の計算効率向上に対する有効性を確認する。

2 解析手法の定式化

2.1 軌道のモデル化

提案法の軌道構造を図-1、図-2に示す。打ち切り端以外の共通部分について、左右レールは軌道軸方向伸縮と横方向たわみを考慮したEulerばりで表現し、有限変位理論に基づいては要素で離散化する。まくらぎは剛な棒として等間隔Lで配置し、レール・まくらぎの締結部には回転ばねKRと横方向ばねKTを設ける。まくらぎに作用する道床横抵抗力fTと縦抵抗力fLは図-3に示すような弾塑性履

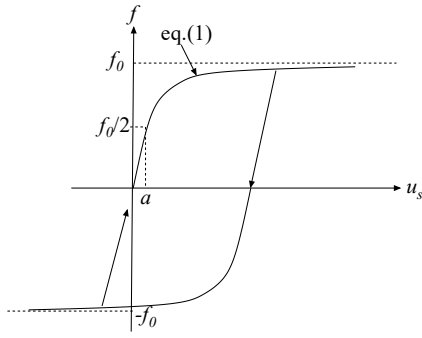


図-3 道床抵抗力の弾塑性履歴

歴を考慮した非線形バネで表わし、次式で与える (5)。

$$f = f_0 \frac{u_s}{a + |u_s|} \quad (1)$$

ここで、 f は道床横抵抗力または縦抵抗力、 f_0 はそれらの最終値、 u_s はまくらぎの横または縦方向変位、 a は $f = f_0/2$ となるときの横または縦方向変位である。ただし、最終道床横抵抗力はまくらぎ 1 本分に相当し、最終道床縦抵抗力はレール 1 本分 (まくらぎ 1/2 本分) に相当している。なお、ランダムな初期通り変位波形設定下における飛び移り座屈温度の探索には、有限要素方程式の節点変位ベクトルとレール温度とで与えられる一般化座標の多次元空間に対して弧長増分法 (6) を適用する。

2.2 打ち切り端境界の定式化

半無限軌道モデルの打ち切り端には、Lim らと同様に半無限軌道と等価な剛性行列を導入する。以降では、可動区間再現モデルの打ち切り端境界を導出する。打ち切り端には本来そこに発生しているレール断面力と等価な圧縮力を作用させる必要がある。可動区間で発生している軸力は次式で与えられる。

$$N = EA \left(\alpha t - \frac{du}{dx} \right) \quad (2)$$

なお、可動区間では、道床縦抵抗力が式 (1) のような非線形式で与えられている。

以下の手順で可動区間の任意点に作用する軸力を求める。例として軌道左端部を考える。軌道長手方向座標 x は従来法における軌道左端を原点とし、右向きを正として設定する。また、軸方向変位 u は $-x$ 方向を正とし、単位長さ当りの道床縦抵抗力 f は x 方向に作用するものとする。なお、ここでは f 及び a については簡単のため下付き添え字 L を省略する。軸方向のつり合い条件は次式で与えられる。

$$\frac{dN}{dx} = f \quad (3)$$

式 (1) より、 f は次式で与えられる。

$$f = f_0 \frac{u}{a + u}, \quad (u > 0) \quad (4)$$

ただし、ここでの f_0 は軌道単位長さ当りの値である。式 (2)、(4) を (3) に代入すると、多少の変形の後次式を得る。

$$(a + u)u'' = \frac{f_0}{EA}u \quad (5)$$

この非線形微分方程式に対し、次のように変数 y を導入する。

$$y = a + u, \quad (y' = u') \quad (6)$$

ここで、 $y' = p$ とおくと、 y'' は次式で与えられる。

$$y'' = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p \quad (7)$$

式 (6)、(7) を (5) に代入すると次式を得る。

$$pdp = \frac{f_0}{EA} \left(1 - \frac{a}{y} \right) \quad (8)$$

式 (8) の両辺を積分して次式を得る。

$$\frac{p^2}{2} = \frac{f_0}{EA} (y - a \log y + C) \quad (9)$$

$p = y' = u' < 0$ より、式 (9) から p は次式で与えられる。

$$p = -\sqrt{\frac{2f_0}{EA} (y - a \log y + C)} \quad (10)$$

$x \rightarrow \infty$ とすると不動区間条件より $u = 0$ となり、 $p = 0$ 、 $y = a$ となるため、次の条件式を得る。

$$\begin{aligned} a - a \log a + C &= 0 \\ \therefore C &= a(\log a - 1) \end{aligned} \quad (11)$$

式 (11) を式 (10) に代入すると次式を得る。

$$p = -\sqrt{\frac{2f_0}{EA} \left(y - a + a \log \frac{a}{y} \right)} \quad (12)$$

$p = y' = u'$ 、 $y = u + a$ であるので、式 (12) より次式を得る。

$$\frac{du}{dx} = -\sqrt{\frac{2f_0}{EA} \left(u + a \log \frac{a}{u+a} \right)} \quad (13)$$

式 (13) より次式を得る。

$$dx = -\sqrt{\frac{EA}{2af_0}} \frac{du}{\sqrt{\frac{u}{a} - \log \left(1 + \frac{u}{a} \right)}} \quad (14)$$

$x = 0$ で $N = 0$ より、次の境界条件を得る。

$$\frac{du}{dx}(0) = -\alpha t \quad (15)$$

すると、式 (13) より次式を得る。

$$\frac{u(0)}{a} - \log \left(1 + \frac{u(0)}{a} \right) = \frac{EA}{2af_0} (\alpha t)^2 \quad (16)$$

式(16)より、温度 t における軌道左端変位 $u(0)$ が定まる。なお、具体的には Newton-Raphson 法より求める。さらに、式(14)より次式を得る。

$$x = \sqrt{\frac{EA}{2af_0}} \int_{u(0)}^{u(x)} \frac{du}{\sqrt{\frac{u}{a} - \log\left(1 + \frac{u}{a}\right)}} \quad (17)$$

よって、Newton-Raphson 法により、左端から x の位置における変位 $u(x)$ が評価できる。なお、式(17)の積分部分は Gauss-Legendre 公式により評価する。

式(13)に、 $u(x)$ の値を代入すると、位置 x における $du(x)/dx$ が求められる。すると、式(2)より位置 x に作用する軸力 $N(x)$ が定まる。よって、可動区間再現モデルの左側の境界端を左端から x に設ける場合、以上より求められる可動区間軸力 $N(x)$ を左側の打ち切り端に作用させれば良い。

なお、打ち切り端のたわみとたわみ角は、それらに因る弾性作用力の有無が解析結果にほとんど影響しないことを確認の上、拘束することとした。

3 解析結果

3.1 解析条件

表-1 軌道の各種物性値

レール伸び剛性	EA	$1.32 \times 10^9 \text{N}$
レール曲げ剛性	EI	$6.63 \times 10^5 \text{Nm}^2$
線膨張係数	α	$12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
締結部横バネ定数	K_T	$40 \times 10^6 \text{N/m}$
締結部回転バネ定数	K_R	$2 \times 10^4 \text{N/rad}$
最終道床横抵抗力	f_{0T}	5500N
最終道床縦抵抗力	f_{0L}	3500N
$f = f_0/2$ のときの変位	a	1.0mm

50kgN レールで構成されるロングレール軌道を想定し解析を行った。そこで軌道の物性値及びレール・まくらぎ締結部と道床抵抗力に関する諸量は表-1のように設定した。また、まくらぎ間隔 L は 0.6m とし、まくらぎ支持点間のレールをはり要素で2分割した。打ち切り端を設けない従来解析では軌道長 720m (まくらぎ 1200 区間) をモデル化した。

ランダムな初期通り変位は文献(3)と同様の手順で生成し、その際の通り変位の標準偏差 σ は 0.005m 、相関長 d は 2.84m とした(3)。

3.2 ランダムな通り変位波形を設定する解析を対象とした半無限軌道モデルの妥当性の検討

半無限軌道モデルでは、打ち切る前の軌道で座屈が発生するおおよその区間を不動区間とみなし、その端部で打ち切ることにする。そこで、打ち切る前のモデルにおいて座屈が発生するおおよその区間を解析結果に基づき検討し、

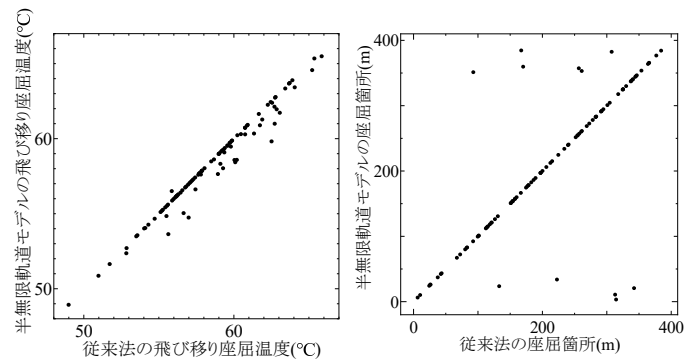


図-4 飛び移り座屈温度の相関

図-5 座屈箇所の相関

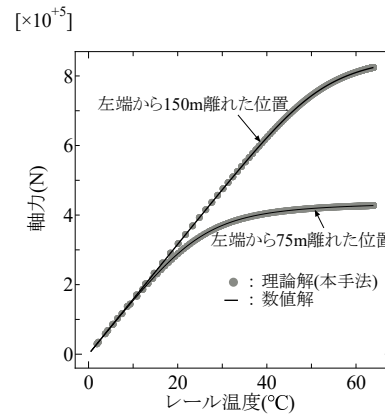


図-6 可動区間内軸力の理論解と数値解の比較

中央 390m を当該区間に設定した。図-4に、半無限軌道モデルと打ち切る前のモデルのそれぞれにより求めた飛び移り座屈温度の 100 ケースの相関を示す。図-4より、両者の対応関係には差異が認められ、多くのケースで適切な再現性を得ることができていないことが分かる。図-5に、両者の座屈箇所(水平変位が最初に 5cm を超えた箇所)の相関を示す。図-5より対応関係が一致していない点は打ち切り端近傍に集中していることが分かる。従ってこの対応関係の不一致は、当初懸念していたように、打ち切り端近傍の再現性の低下によるものと考えられる。以上より、半無限軌道モデルをランダムな通り変位波形を設定する場合に適用することは極めて困難であることが分かった。

3.3 可動区間再現モデルによる軸力評価精度の確認

続いて可動区間再現モデルについて検証した。可動区間再現モデルでは、可動区間に作用する軸力を 2.2 の手順で求め、打ち切り位置に作用させる。そこでまず、そのようにして求めた軸力が、本来その位置で作用している軸力を再現できているかについて確認した。図-6に、軌道左端から 75m および 150m 離れた位置を例として、2.2 の手順で求めた軸力と、その位置で本来作用している軸力を数値解析より求めた結果を比較する。なお、軸力の数値解は、軌道軸方向ひずみを求めて式(2)より評価している。図-6より、高温域では軸力が非線形的に変化していることから、当該

位置が可動区間に位置している様子が窺える。両者はほとんど完全に一致していることから、2.2 に示した手法により可動区間に本来作用している軸力を適切に評価可能であることが分かった。

3.4 ランダムな通り変位波形を設定する解析を対象とした可動区間再現モデルの妥当性の検討

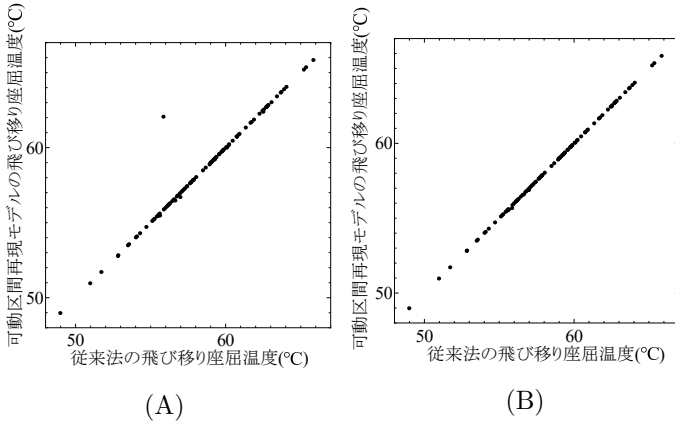


図-7 飛び移り座屈温度の相関

このモデルでは、打ち切る位置は可動区間内であるものの、その適切な位置については座屈解析結果に基づいた検討を要する。そこで、打ち切り位置を変化させ、適切な計算精度を得るために必要な軌道長を調べた。

図-7に、打ち切る位置を軌道中央から(A)195m、(B)210mとした場合の可動区間再現モデルと、従来モデルにより求めた飛び移り座屈温度とについて、100 ケースの相関を示す。これらの図より、どちらも対応関係の一致度は半無限軌道モデルと比べてはるかに良好であることが分かる。しかし、打ち切り位置が中央から195mの場合は、一致していない例が1 ケース見られた。そこで、当該ケースにおける座屈箇所を確認したところ、座屈箇所が打ち切り位置と最も近いケース(打ち切り端から5m程度)であった。本解析条件下で適切な解析結果を得るためには、座屈が生じるおおよその区間から15m程度離して打ち切る必要があることが分かった。以上より、可動区間再現モデルは打ち切る位置を適切に設定することで、ランダムな通り変位波形下での座屈解析に適用することが可能であることが分かった。

3.5 可動区間再現モデルによる計算効率の向上

MCSにより飛び移り座屈温度の確率分布を求める場合を想定し、従来モデル(軌道長720m)と、可動区間再現モデルで中央210mの位置で打ち切った場合(軌道長420m)とで、飛び移り座屈温度を5000 ケース求め、その際に要した時間を計測した。図-9に、それらの全計算時間とその内訳を示す。全計算時間は可動区間再現モデルを用いることにより約0.29倍となり、大幅に短縮された。一回当たりの連立方程式の求解に要する計算時間と連立方程式の計算回

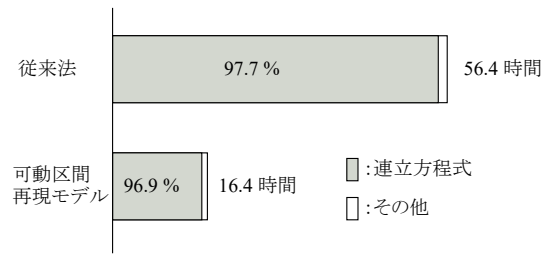


図-8 計算時間

数は、それぞれ約0.47倍、0.61倍に減少しており、これらが計算時間短縮の要因となっている。本解析では、弧長増分法に基づく連立方程式の求解に、ソルバーとして非ゼロ成分の記憶のみを必要とする直接解法を用いている。この場合、一回当たりの連立方程式の求解に要する時間は連立方程式のサイズ(自由度)の変化に応じて増減する。本解析では打ち切ることにより自由度が約0.58倍に減少し、それに応じて当該時間は上述の様に短縮された。

また、本解析では飛び移り座屈に至るまでのつり合い経路を弧長増分法⁶⁾を適用して求めており、そこでは各つり合い点の間隔が弧長によって決定される。自由度(節点数)が小さくなると当該空間の次元が低減されるので、弧長一定の下で相対的に温度増分が増大する。その結果、飛び移り座屈に至るまでの増分回数が減少し、連立方程式を解く回数が減少した。

4 おわりに

本研究では、ランダムな通り変位波形を設定する座屈解析を対象に、計算効率向上を図るための軌道打ち切り境界の設定法に関する検討を行った。Limら⁽⁴⁾と同様の手法である半無限軌道モデルは、ランダムな通り変位波形を設定する解析には適用が困難であることが分かった。一方可動区間再現モデルは、打ち切る位置を適切に設定することで正確に飛び移り座屈温度が得られることが確認でき、比較的高い計算効率の向上が認められた。

参考文献

- 1) 阿部和久, 水野雄太, 紅露一寛: 通り変位波形によるバラツキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.24, 167-174, 2020.
- 2) 阿部和久, 小坂拓斗, 紅露一寛: 種々の不確実性を考慮した軌道座屈発生件数の期待値解析, 鉄道工学シンポジウム論文集, Vol.27, 183-190, 2023.
- 3) 岩井翔, 阿部和久, 紅露一寛: 通り変位と道床横抵抗力のバラツキを考慮した軌道座屈余裕度の確率的評価, 鉄道工学シンポジウム論文集, No25, 69-76, 2021.
- 4) Lim, N-H., Han, S-Y., Hee, T., and Kang, Y-J: Parametric study on stability of continuous welded rail track-ballast resistance and track irregularity-, Steel Structures, Vol.8, 171-181, 2008.
- 5) 宮井徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術研究報告, No1271, 1984.
- 6) 岩崎英治, 松野純一, 長井正嗣: 弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法, 応用力学論文集, Vol.5, 207-216, 2002.