三次元比抵抗トモグラフィ法によるトンネル切羽前方地山の推定

新潟大学大学院自然科学研究科　学生員　竹内　新
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム　正会員　阿部　和久
株式会社福田組　正会員　椎谷　成孝
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム　正会員　紅露　一寛

1　はじめに

トンネル掘削の際に，切羽前方域の地山構造を事前に把握することは，施工の安全性や経済性確保などの面で重要である．そのため，トンネル切羽面前方に設けたボーリング孔から試料を採取して，強度試験を行って力学特性を評価する，ボーリング調査法[1)]が広く用いられている．当該法では試料を直に採取するため，その力学性状を的確に知ることができる．しかし，ボーリング資料より得られる情報は一次元的なものに限定されることに加え，ボーリング工事は費用と時間を要するため，削孔数には限界がある．したがって，トンネル切羽前方の地山構造を三次元的に把握するためには，ボーリング調査法を補完する新たな手法の導入が必要となる．

そこで著者ら[2)]は，上述の調査法に加え，電気探査法[3)]の一つである比抵抗トモグラフィ探査法を併用した手法の開発を行っている．当該法では，トンネル切羽面の 3 箇所で水平ボーリングを実施し，その内 1 本を電流入力に，他の 2 本を電位測定に用い，その結果より地山の電気比抵抗値の三次元的推定を行う．なお，文献 2）では，比抵抗分布の推定の際に拡張 Kalman フィルタ[4)]を用いた．当該推定法は，本来線形逆問題を対象とした Kalman フィルタを非線形問題に拡張したものであり，未知量の修正過程は必ずしも非線形問題に適した効率的なものとはなっていない．そのため，文献 2）に示した解析例では，未知量の収束が緩慢で，問題によっては不安定なものとなっていた．

そこで文献 5）では上述の問題点の改善を目的として，Bayes の定理[6)]に基づいた推定法を構成した．その下で，最小解の探索に勾配法に基づいた非線形推定法を適用することにより，計算負荷が比較的軽微で，さらに安定且つ速やかな収束性を確保し得る手法を構築した．これにより，観測データ数より未知数が多い非適切問題を与える場合に正則化項の役割を果たす事前情報に関する共分散行列についても，その最適値を客観的に決定することが可能となった．

本研究では，文献 5）に構成した手法を実際の現場で得られた電気比抵抗測定データに適用し，ボーリングデータとの比較により，推定結果の妥当性について検討する．

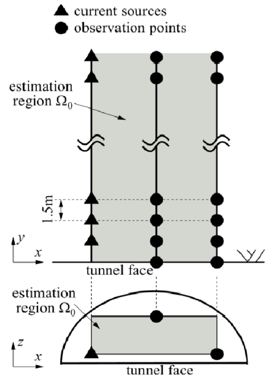

図 1　測定手順　概略図

2　トンネル切羽前方探査解析

2.1　電気探査法の概要

トンネル切羽前方域に，**図 1** に示す様に 3 本のボーリング孔を設ける．なお，**図 1** において，部分領域 Ω_0 は未知量である電気伝導率（比抵抗の逆数）の推定領域である．

電位測定を以下の手順により実施する．

1) 電位測定に用いる切羽面中央上部および右下部ボーリング孔を削孔する．
2) 上記 2 つのボーリング孔内に固定電極を等間隔 (1.5m) に設置する．
3) 左下部に電流入力用のボーリング孔を 1 ロッド分 (1.5m) 打撃削孔する．
4) 移動電極を左下部ボーリング孔に挿入し，先端地山に接地させて電流を入力する．
5) 中央上部および右下部ボーリング孔内の各固定電極における電位を測定する．
6) 移動電極を回収する．
7) 3)～6) を繰り返す．

2.2　電気探査法の順解析過程

2.1. に述べた電気探査を対象とした有限要素順解析過程において，トンネル切羽前方の三次元場を**図 2** に示す有限領域 Ω で表現する．Ω 内の電位場は次の支配方程式で与えられる．

$$\mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}\ u) = -Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathrm{in}\ \Omega \qquad (1)$$

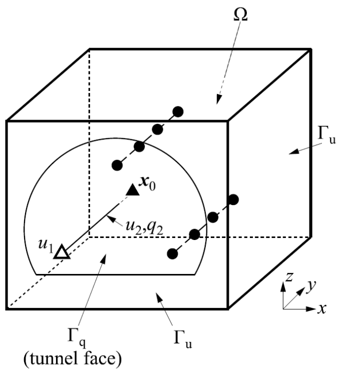

図 2　解析モデル

ここで，u は電位，k は電気伝導率，$\mathbf{x}_0$ は電流入力点，Q は入力電流，δ はデルタ関数である．

本研究における境界条件は，次式により与えられる．

$$
\begin{aligned}
q :=& \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \Gamma_q \\
u =& \frac{\rho Q}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}, \quad \text{on } \Gamma_u
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで，Γ_q はトンネル切羽面に対応する部分境界であり，当該境界面内に位置している有限要素節点においては法線 n 方向流束 q をゼロに規定する．Γ_u はそれ以外の境界であり，そこに属する節点では電位を規定する．なお，Ω 内の電位場が無限領域のそれを近似し得る様に，Γ_u 上の節点では $\mathbf{x}_0$ に電流 Q を入力した場合の電位を式 (2) 第 2 式により設定する [2]．式 (2) の ρ は，領域全体を一様場と見なした際の見かけの比抵抗値である．また，電流入力用ボーリング孔は，入力点 $\mathbf{x}_0$ 手前まで中空の金属ロッドで保護されているため，そこに位置する節点電位 u_2 は，切羽面上のロッド端電位 u_1 と等しい値をとる様に拘束する．

式 (1)，(2)，および上述の設定条件に対応する有限要素方程式を次式で与える．

$$
\begin{bmatrix}
\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{b1} & \mathbf{K}_{b2} & \mathbf{0} \\
\mathbf{K}_{1a} & \mathbf{K}_{1b} & K_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{0} \\
\mathbf{K}_{2a} & \mathbf{K}_{2b} & \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & -\mathbf{I} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{I} & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \\ u_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{q}_2
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\bar{\mathbf{u}}_a \\ \bar{\mathbf{q}}_b \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0}
\end{Bmatrix}
\tag{3}
$$

ここで，$\mathbf{u}_a = \bar{\mathbf{u}}_a$ は Γ_u 上の規定節点電位，$\mathbf{u}_b$ は $\mathbf{u}_a, u_1, \mathbf{u}_2$ 以外の節点における電位，$\mathbf{q}_2$ はロッド上の節点流束，$\bar{\mathbf{q}}_b$ は $\mathbf{u}_b$ に対応する流束であり，$\mathbf{x}_0$ で Q，それ以外の節点ではゼロとなる．また，$\mathbf{I}$ は単位行列，$\mathbf{1} = \{1\ 1\ \cdots 1\}^T$ である．

3　電気伝導率の推定法

3.1　目的関数の設定

上述の電気探査において，電流入力用ボーリングロッドの掘進過程を N ステップ実施する場合について考える．第 α ステップ目における電流入力･電位測定の求解方程式 (式 (3)) を次式で表すものとする．

$$
[\mathbf{A}^\alpha]\{\mathbf{v}^\alpha\} = \{\mathbf{b}^\alpha\}, \quad (\alpha = 1, \cdots, N) \tag{4}
$$

ここで，$[\mathbf{A}^\alpha]$, $\{\mathbf{v}^\alpha\}$, $\{\mathbf{b}^\alpha\}$ は，それぞれ第 α ステップ目の式 (3) における求解行列，未知ベクトル，および右辺ベクトルである．

切羽面中央上部および右下部ボーリング孔での測定電位を成分とするベクトルを $\{\mathbf{Y}^\alpha\}$ とし，それに対する理論値を $\{\mathbf{h}^\alpha\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{v}^\alpha\}$ で与えるものとする．なお，$[\mathbf{B}]$ は式 (4) の解 $\{\mathbf{v}^\alpha\}$ から測定点における電位成分を抽出する定数行列である．測定ノイズを $\{\boldsymbol{\epsilon}^\alpha\}$ とすると，次の関係が成り立つ．

$$
\{\mathbf{Y}^\alpha\} = \{\mathbf{h}^\alpha\} + \{\boldsymbol{\epsilon}^\alpha\} \tag{5}
$$

$\{\boldsymbol{\epsilon}^\alpha\}$ の各成分を，互いに独立な期待値ゼロ，標準偏差 σ_ε の Gauss ノイズと仮定すると，$\{\mathbf{h}^\alpha\}$ が与えられた場合の $\{\mathbf{Y}^\alpha\}$ の事後確率分布の指数部 $J_{1\alpha}$ は次式で与えられる．

$$
J_{1\alpha} = -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}||\mathbf{Y}^\alpha - \mathbf{h}^\alpha||^2 \tag{6}
$$

部分領域 Ω_0 における電気伝導率を，有限要素毎に，もしくは幾つかの要素集合毎に設定するものとし，これら未知量を成分として与えられるベクトルを $\{\mathbf{X}\}$ で表す．当該未知量の事前情報が，期待値 $\{\tilde{\mathbf{X}}\}$ および精度行列 (共分散行列の逆行列)$[\boldsymbol{\Phi}]$ の正規分布で与えられているものとする．すると，$\{\mathbf{X}\}$ の事前確率分布の指数部 J_2 は次式で与えられる．

$$
J_2 = -\frac{1}{2}[\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}]^T[\boldsymbol{\Phi}]\{\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\} \tag{7}
$$

ベイズの定理 [6] により，測定データ $\{\mathbf{Y}^\alpha\}, \alpha = 1, \cdots, N$ が与えられた場合の，未知ベクトル $\{\mathbf{X}\}$ の事後確率密度関数 $p(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$ は次式により評価できる．

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) =& \frac{p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})p(\mathbf{X})}{p(\mathbf{Y})} \\
=& \frac{p(\mathbf{X})}{p(\mathbf{Y})}\prod_\alpha p(\mathbf{Y}^\alpha|\mathbf{X})
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ここで，$p(\mathbf{Y}^\alpha|\mathbf{X})$ は $\{\mathbf{X}\}$ が与えられた場合の $\{\mathbf{Y}^\alpha\}$ の事後分布，$p(\mathbf{X})$, $p(\mathbf{Y})$ は事前分布である．なお，各ステップの測定ノイズは互いに独立であることから，$p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ は $p(\mathbf{Y}^\alpha|\mathbf{X})$ の積で与えられる．

式 (8) で，測定後における $p(\mathbf{Y})$ は確定量 (定数) となるので，その場合の $p(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$ は $p(\mathbf{X})\Pi_\alpha p(\mathbf{Y}^\alpha|\mathbf{X})$ に比例する．よって，$\{\mathbf{X}\}$ の最適推定解は，$p(\mathbf{X})\Pi_\alpha p(\mathbf{Y}^\alpha|\mathbf{X})$ の指数部を最大ならしめる $\{\mathbf{X}\}$ により与えられる．

以上より，未知量の推定問題を，式 (6)～(8) より，次式の目的関数 J の最小化問題として設定する．

$$J = -\sum_{\alpha=1}^{N} J_{1\alpha} - J_2 + \sum_{\alpha=1}^{N} [\boldsymbol{\lambda}^\alpha]^T \{\mathbf{A}^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \mathbf{b}^\alpha\} \qquad (9)$$

ここで，$\{\boldsymbol{\lambda}^\alpha\}$ は未定乗数ベクトルである．

3.2　未知量推定法

式 (9) の目的関数 J は，未知量である電気伝導率の非線形関数で与えられるため，最小解は反復計算により求めることとなる．本研究では，J の最小解探索に勾配法を適用する．

式 (4) を考慮すると，式 (9) より $\partial J/\partial X_i$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial X_i} =& \Phi_{ij}(X_j - \tilde{X}_j) - \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_\alpha (Y_k^\alpha - h_k^\alpha) B_{kl} \frac{\partial v_l^\alpha}{\partial X_i} \\ &+ \sum_\alpha \lambda_k^\alpha \left(\frac{\partial A_{kl}^\alpha}{\partial X_i} v_l^\alpha + A_{kl}^\alpha \frac{\partial v_l^\alpha}{\partial X_i} \right)\end{aligned} \qquad (10)$$

ここで，行列・ベクトル成分における繰り返し指標は総和規約に従うものとする．なお，$\partial h_k^\alpha/\partial X_i = B_{kl}\partial v_l^\alpha/\partial X_i$ の関係を用いた．

$\{\boldsymbol{\lambda}^\alpha\}$ に次の随伴方程式を課すものとする．

$$[\mathbf{A}^\alpha]^T\{\boldsymbol{\lambda}^\alpha\} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}[\mathbf{B}]^T\{\mathbf{Y}^\alpha - \mathbf{h}^\alpha\} \qquad (11)$$

すると，式 (10) の $\partial J/\partial X_i$ は次式で与えられる．

$$\frac{\partial J}{\partial X_i} = \Phi_{ij}(X_j - \tilde{X}_j) + \sum_\alpha \lambda_k^\alpha \frac{\partial A_{kl}^\alpha}{\partial X_i} v_l^\alpha \qquad (12)$$

これにより，感度 $\partial v_i^\alpha/\partial X_j$ を求める必要が無くなり，そのための連立方程式の求解計算が不要となる．

式 (12) で求めた勾配成分より，未知量の修正成分 ΔX_i を次式に基づき与える．

$$\Delta X_i = -\beta \frac{\partial J}{\partial X_i} \qquad (13)$$

ここで β の値は，$|\Delta X_i/X_i|$ が所定の上限値以下となる様に設定する．また，未知量 X_i は電気伝導率であるので，物理的に正値をとらねばならない．修正過程において当該要件を保証するため，X_i を $\tilde{X}_i e^{\gamma_i}$ と指数表現により与える．すると，ΔX_i は次式で近似できる．

$$\Delta X_i \approx X_i \Delta\gamma_i \qquad (14)$$

ここで，$\Delta\gamma_i$ は γ_i の修正量である．

式 (13), (14) より次の修正式を得る．

$$X_i + \Delta X_i = X_i \cdot e^{\Delta\gamma_i}, \quad \Delta\gamma_i = -\frac{\beta}{X_i}\frac{\partial J}{\partial X_i} \qquad (15)$$

3.3　超パラメータの設定

超パラメータである $[\mathbf{\Phi}]$，および σ_ε^2 の最適値を求めるために，$\{\mathbf{X}\}$ の事後確率分布に関する次の平均データ尤度 Θ[6] を導入する．

$$\begin{aligned}\Theta = &-\sum_\alpha \left\{ \frac{M}{2}\ln\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}E(||\mathbf{Y}^\alpha - \mathbf{h}^\alpha||^2) \right\} \\ &+ \frac{1}{2}\ln|\mathbf{\Phi}| - \frac{1}{2}E([\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}]^T[\mathbf{\Phi}]\{\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\})\end{aligned} \qquad (16)$$

ここで，M は観測点総数である．Θ の最大化条件 ($\partial\Theta/\partial\sigma_\varepsilon^2 = 0$, $\partial\Theta/\partial\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$) より，多少の計算の後，以下の超パラメータの最適値が求められる．

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{MN}\sum_\alpha E(||\mathbf{Y}^\alpha - \mathbf{h}^\alpha||^2) \approx \frac{1}{MN}\sum_\alpha ||\mathbf{Y}^\alpha - \mathbf{h}^\alpha||^2 \qquad (17)$$

$$[\mathbf{\Phi}] = [\mathbf{\Gamma}] - \frac{1}{1 + [\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}]^T[\mathbf{\Gamma}]\{\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\}}[\mathbf{\Gamma}]\{\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\}[\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}]^T[\mathbf{\Gamma}] \qquad (18)$$

ここで，$[\mathbf{\Gamma}]$ は本来 J の Hessian であるが，本手法では計算負荷軽減のため，その近似行列を BFGS 法[7] により求め代用する．

4　現場測定データへの適用

4.1　解析条件

本調査手法を鳥取県内の道路トンネル工事の切羽前方探査に適用し，その結果に基づき提案法の有用性について検討した．その現場条件をモデル化したものを**図 3**，**4** に示す．境界条件は，ロッド上を等電位拘束とし切羽面における半円内には切羽面に対して垂直方向への電流が 0 である Neumann 条件，それ以外の境界には，電流入力点からの 距離に反比例した電位を与える Dirichlet 条件を課した．1.5 m掘削するごとにロッドの先端から電流を入力し，電流入力は計 34 回行った．また，推定対象領域は**図 3** の Ω_0 で示す六面体の領域である．

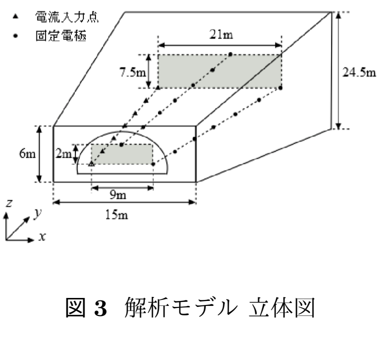

図 3　解析モデル 立体図

4.2　解析結果

実際のボーリングデータを**図 5**，y=25，30，40m における推定結果を**図 6**，**7**，**8** に示す．y 座標方向に進むにつ

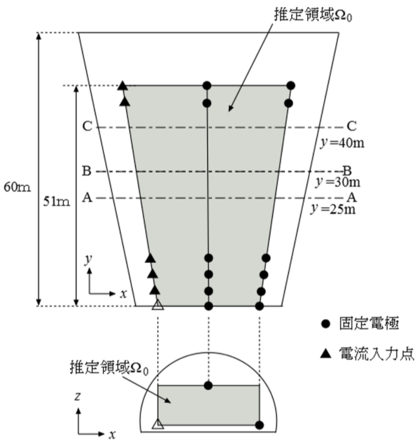

図 4　解析モデル $x-z$ 平面図，$x-y$ 平面図

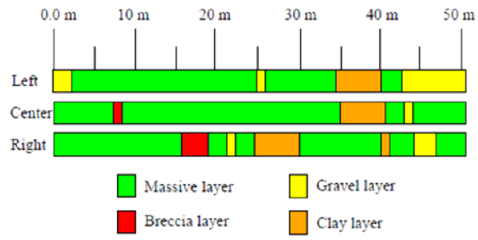

図 5　ボーリングデータ

れて，推定値の高い領域が右から左へ移動する様子が確認できる．実際のボーリングデータと照合すると，完全には一致していないものの，一般に電気伝導率の高い粘土状の地質域が右手前から左奥にわたり分布しており，**図 5** と同様の結果を得た．以上より，本推定手法による推定結果とボーリングデータとを組み合わせることで，地質分布の三次元的な推定が可能であると考えられる．また，今回の解析における収束までのステップ数は 4 ステップ，計算時間は約 30 分となり，先行研究 2) と比較すると大幅に計算時間を短縮することができた．

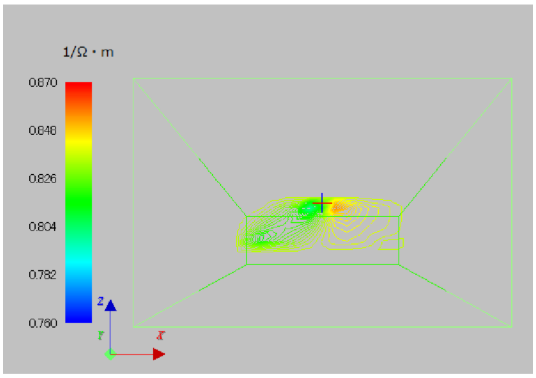

図 6　切羽面から 25 m地点 A-A 断面図

5　おわりに

本研究では，EM アルゴリズムと勾配法を用いた三次元比抵抗推定を試みた．現場測定に適用した結果，文献 2) で構成した手法に比べ，収束までに要する計算時間を大幅に短縮可能であることがわかった．

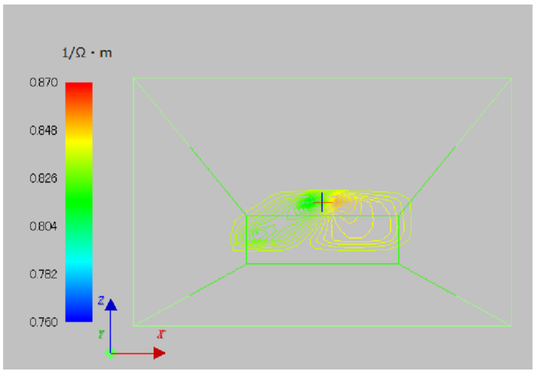

図 7　切羽面から 30 m地点 B-B 断面図

参考文献

1) 保坂雅夫，小池　豊：地質調査ボーリング —その歴史と最近の技術の動向—，地盤工学会誌，**41**(1993), No.9, pp.13-18.
2) 佐々木　丈，阿部和久，椎谷成孝，今村大介，紅露一寛：比抵抗トモグラフィによるトンネル切羽前方の三次元地山構造推定，計算数理工学論文集，**17**(2017), pp.71-76.
3) (財) 物理探査学会編：物理探査適用のてびき，(財) 物理探査学会, (2008).
4) 樋口知之：データ同化入門，朝倉書店，(2011).
5) 竹内　新，阿部和久，椎谷成孝，紅露一寛: 三次元電気探査法に基づくトンネル切羽前方探地山推定手法の改善, 計算数理工学論文集，**19**(2019)
6) 関原謙介：ベイズ信号処理，共立出版，(2015).
7) Bonnans, J.F., et al.: Numerical Optimization (2nd Ed.), Capt.4 and 5，Springer，(2006).

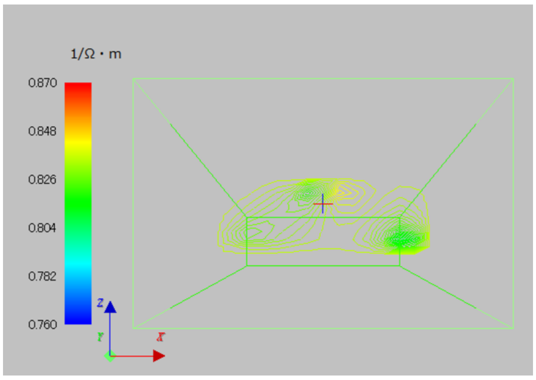

図 8　切羽面から 40 m地点 C-C 断面図