

# 移動床における擬似固定床についての物理的考察

新潟大学大学院自然科学研究科 ○学生会員 石原 道秀  
新潟大学災害・復興科学研究所 正会員 安田 浩保

## 1 はじめに

交互砂州の発生や発達に関する研究は、Callander<sup>1)</sup>を端緒としてこれまでに様々な理論的研究<sup>2),3),4)</sup>が行われ、その発生条件や発達機構に関する多くの知見が報告されている。これらの研究では、安定性解析と呼ばれる流れと流砂のそれぞれの連続式と運動方程式を解析的に解く手法が用いられている。また、多くの安定性解析では、底面の伝播速度が流れの伝播速度よりも十分に遅いものとし、河床を擬似固定床として扱えるものとしている。この擬似固定床の仮定により流れの連続式および運動方程式中の時間勾配の項を無視する仮定をしている。擬似固定床の仮定はしばしば適用されているが、底面と流れの伝播速度の比較や流れの時間勾配の扱いの是非など、擬似固定床の実証については著者らが知る限り行われていないようである。

底面と流れの伝播速度を比較した研究は少ない。安定性解析<sup>1),5)</sup>において底面の伝播速度を等流流速で除した無次元伝播速度が算出され、その値が $10^{-5}$ から $10^{-2}$ 程度であることが報告されている。上記のことから擬似固定床の仮定は、上記の条件下で成立するとして適用されているのが伺える。しかし、安定性解析による無次元伝播速度は最大波数に対応した理論的な値でしかない。また、河床波の伝播速度の空間分布についても実測された事例はない。そのため、交互砂州における無次元伝播速度がどの程度となるかについてはほとんどわかっていない。

交互砂州などの河床波状の流れの時間勾配の項について詳しい言及をした研究は著者らの調べた範囲ではなかった。先行研究が存在しない要因として、時々刻々と変化する交互砂州とその上の水理量を同時に計測する技術が未発達であったことが考えられる。模型実験を用いた多くの既往の研究では、底面形状の計測時に通水を中断する方法が用いられ、底面形状と水理量を同時に計測していない。つまり、流れの時間勾配の算出に必要な計測値が得られなかったことが未実施の要因であると推測される。また、水理解析によって上記の検証を行う方法も考えられるが、計測値が不足している以上、その検証は定性的な範囲に留まる。

近年になり、模型実験規模ではあるが、通水を継続したまま水面と底面の幾何学的形状を同時に計測できる Stream

Tomography(ST)<sup>6)</sup>が開発され、交互砂州の発達過程における底面形状と水理量の定量化が可能となってきた。これにより、計測値に基づいた移動床における流れの時間勾配の項の扱いについて初めて議論が行える。また、著者ら<sup>7)</sup>は河床波の伝播速度の空間分布を把握できる推定式を構築し、伝播速度の空間分布の定量化をしている。

本研究では、STの計測値および無次元伝播速度の空間分布に基づいて、交互砂州を対象に移動床における擬似固定床についての物理的に考察した。

## 2 模型実験の概要

### 2.1 実験条件

本研究では、全長 12.0 m、流路幅 0.45 m を持つ可変勾配の直線矩形断面の水路を模型実験に使用した。水路への給水は、下流端の水槽から上流端の水槽にポンプ圧送して定常で供給する循環式を採用した。供給する流量の精度や定常性については、電磁式流量計を用いて確認した。上記の水路上に、上流端より 2.0 m から 10.0 m の区間にわたって、平均粒径 0.76 mm の非粘着性の 4 号珪砂を厚さ約 5 cm で平坦に敷き詰め、これを初期河床とした。

水理条件は交互砂州の発生を狙い、黒木・岸<sup>2)</sup>の中規模河床形態の領域区分を参考に交互砂州の発生領域に設定した。この時の流量は 1.5 L/s、河床勾配は 1/160、 $BI_0^{0.2}/h_0$  は 13.5、無次元掃流力は 0.06、等流流速は 0.28 m/s、等流水深は 0.012 m である。

上記の条件を与えた模型実験を、交互砂州が発達し伝播と形状変化が緩慢となった 4 時間まで行った。

### 2.2 計測手法

本研究では、星野らが開発した通水したまま底面位と水位の計測が可能な ST<sup>6)</sup>を用い、全長 8.0 m、幅 0.45 m の計測範囲における上記を 2 cm<sup>2</sup> の空間分解能で計測した。計測は 1 分ごとに行った。また、水深は水位と底面位の差から求めた。詳しい計測原理は原著<sup>6)</sup>を参照されたい。

### 2.3 実験結果

図-1 に ST で計測した底面位および水深の平面コンターを示す。本研究では、1 分間隔で ST の計測を行ったが、紙面の都合上、同図は全ての結果を記載できないため、40 分間隔の結果を記載した。

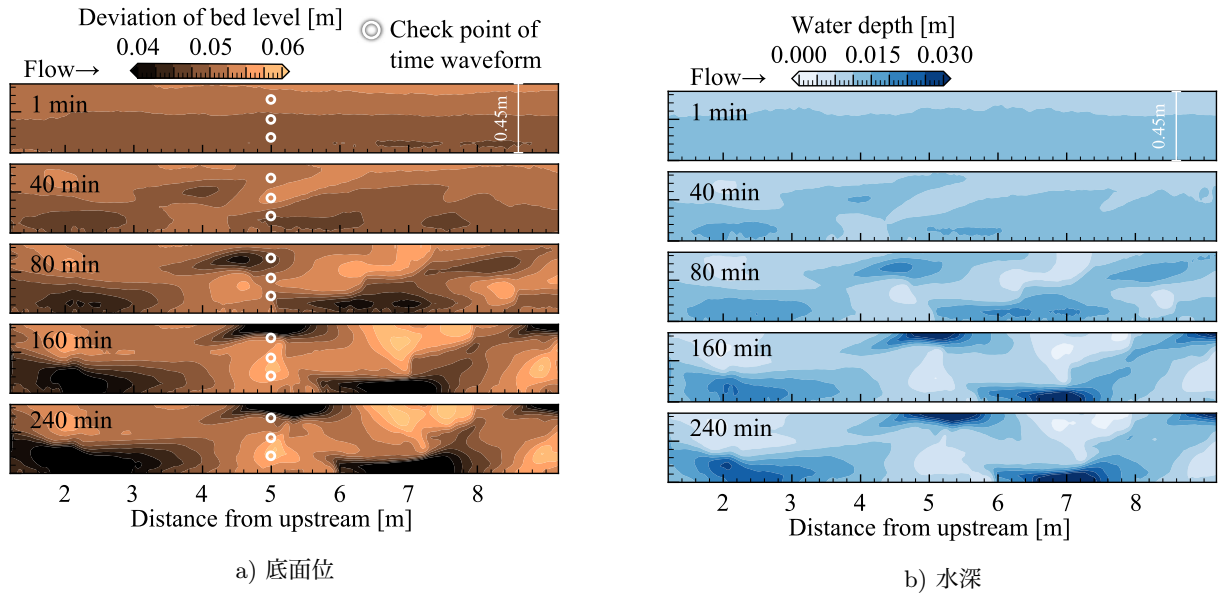


図-1 ST の計測結果

通水 1 分における同図の a) 底面は平坦床であり、通水開始後 40 分から 80 分にかけて底面の顕著な変化が確認できる。通水 40 分時点で、上流端より 2 m から 7 m の区間において流下方向に左右交互に堆積と洗掘を繰り返す周期的な底面起伏が形成されていることから、交互砂州の発生が確認できる。この交互砂州は時間経過とともにその起伏を発達させながら下流側に移動している。通水 160 分以降は、1 分から 80 分までと比べて顕著な変化はなく、最終時刻の 240 分にかけて底面が緩やかに移動している。次に水深の平面図を見てみると、通水 1 分時における水深の空間分布は平坦な底面と対応するように一様な分布となっている。その後、交互砂州が発生・発達するに従って、底面に対応して水深の空間分布も変化している。その分布は交互砂州の堆積部で浅く、洗掘部で深いことがわかる。同図を一連の流れで見てみると、実験中における流れの時間的な変化は通水 1 分から 80 分までが比較的大きく、通水 160 分以降は小さいことが推測される。

### 3 伝播速度の推定式の適用性の検証

#### 3.1 伝播速度の推定式

本研究では、以下の底面位  $z$  の双曲型偏微分方程式に含まれる伝播速度の推定式を用い、以降の疑似固定床についての物理的な考察を行う。これに先立ち、浅水流方程式と河床の連続式から導いた底面位  $z$  の双曲型偏微分方程式について述べる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + M_x \frac{\partial z}{\partial x} + M_x I_{ex} + M_x F_x + \\ M_y \frac{\partial z}{\partial y} + M_y I_{ey} + M_y F_y = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

上式のうち、 $M_x$  は底面位  $z$  の縦断成分の移流速度であり、河床波の縦断成分の伝播速度を表している。また、 $M_y$  は河床波の横断成分の伝播速度を表している。 $M_x$ 、 $M_y$ 、 $F_x$ 、 $F_y$  はそれぞれ以下の式で表される。

$$M_x = \frac{4(\tau_* - \tau_{*c})^{1/2} \sqrt{sgd^3} \left(\frac{u}{V}\right) I_e}{sd(1 - \lambda)} \quad (2)$$

$$M_y = \frac{4(\tau_* - \tau_{*c})^{1/2} \sqrt{sgd^3} \left(\frac{v}{V}\right) I_e}{sd(1 - \lambda)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} F_x = \frac{3}{10} \frac{u^2}{gI_{ex}} \frac{\partial I_{ex}}{\partial x} - \frac{1}{5} \frac{uv}{gI_{ey}} \frac{\partial I_{ey}}{\partial y} \\ + \frac{1}{2} \frac{uv}{gI_{ex}} \frac{\partial I_{ex}}{\partial y} + 6 \frac{h}{V} \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} F_y = \frac{3}{10} \frac{v^2}{gI_{ey}} \frac{\partial I_{ey}}{\partial y} - \frac{1}{5} \frac{uv}{gI_{ex}} \frac{\partial I_{ex}}{\partial x} \\ + \frac{1}{2} \frac{uv}{gI_{ey}} \frac{\partial I_{ey}}{\partial x} + 6 \frac{h}{V} \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $z$  は底面位、 $t$  は時間、 $x$  は縦断距離、 $I_{ex}$  はエネルギー勾配の縦断成分、 $y$  は横断距離、 $I_{ey}$  はエネルギー勾配の横断成分、 $\tau_*$  は無次元掃流力、 $\tau_{*c}$  は限界掃流力、 $s$  は砂粒子の水中比重、 $g$  は重力加速度、 $d$  は粒径、 $\lambda$  は空隙率、 $u$  は縦断流速、 $V$  は合成流速、 $I_e$  はエネルギー勾配の合成成分、 $v$  は横断流速である。

#### 3.2 検証方法

上記の式 (2) と (3) の適用性は、以下の計算方法により底面位の時間波形を求めることで調べた。具体的には、ST で計測した底面位および水深、次節にて述べる水理解析によるエネルギー勾配と流速の計算値を用い、双曲型偏微分

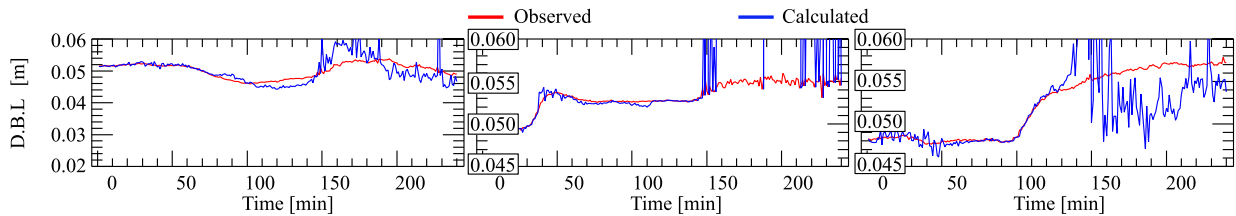
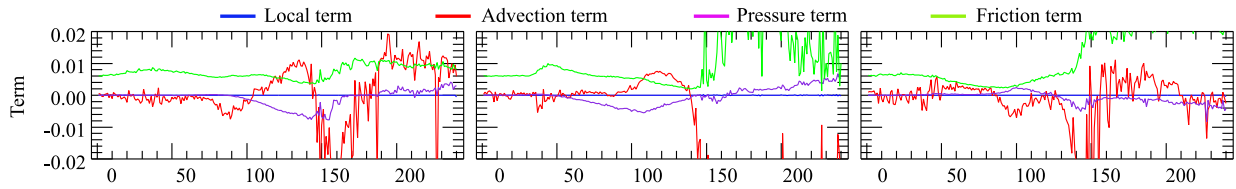
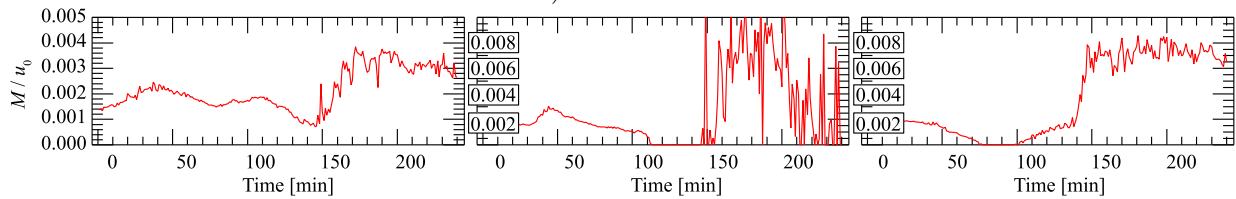


図-2 底面位の時間波形（左から左岸側，中央，右岸側の時間波形）



a) 各項の寄与度



b) 無次元伝播速度

図-3 各諸量の時間波形（左から左岸側，中央，右岸側の時間波形）

方程式を数値的に積分して  $\Delta t$  間の河床変動量を算出した。この数値積分を ST の計測時刻毎に繰り返すことで底面位の時間波形を描いた。上記の方法により算出した底面位の時間波形と ST で得た底面位の時間波形を比較し、前章で得た双曲型偏微分方程式の適用性を調べた。本研究では ST により 1 分間隔で底面位を計測しているため、上記の計算での  $\Delta t$  を 1 分として計算した。

### 3.3 検証に必要な水理量について

伝播速度の推定式の適用性の検証に必要な水理量は主に底面位、水深、流速、エネルギー勾配である。底面位や水深は ST の計測値を用いるが、それらと対になる流速やエネルギー勾配は計測できておらず、また一般的にも上記の計測は困難である。そこで本研究では、ST で計測した底面形状を既知の固定床とした水理解析を行い、上記を得た。

流速およびエネルギー勾配の算出のための水理解析には、平面二次元解析のソルバーである iRIC<sup>8)</sup> に同梱される Nays2D を使用した。計算点の配置間隔は縦横断ともに ST の分解能と同じ 2 cm、上流端境界条件は流量 1.5 L/s、下流端境界条件は計測した水深を与えた。また、粗度係数は水深の計算値と計測値が合うように時刻ごとに調整を行い、区間全体で一様に与えた。計算値の妥当性の確認は水深の計算値と計測値を比較し、両者の差分値が平均的に計測した水深の 10%以内となるまで、粗度係数を調整した。

### 3.4 検証結果

図-2 は図-1 中の白丸印の箇所における底面位の時間波形を示しており、同図の左から左岸側，中央，右岸側の結果を表している。また、図中の赤線は計測値、青線は計算値の時間波形を表している。

同図を見てみると、左岸側や中央，右岸側に関わらず 150 分までであれば良好に底面の時間波形を再現していることがわかる。150 分以降は底面の発達によって波高の増大し、水深が極端に浅くなる。現段階では推定式の適用性の低下要因について十分に特定できていないものの、低水深となる箇所では慎重な扱いが必要となることが示唆される。ただし、図-1 の b) からわかるように、水深が極端に浅くなるほどの波高の高い砂州は実河川において実在するとは考えにくく、上述の箇所における適用性の低下は許容できるものと推測される。

## 4 流れの時間勾配と無次元伝播速度による疑似固定床の物理的な考察

本章では、流れの時間勾配と無次元伝播速度を用いて、疑似固定床の仮定に関する物理的な考察を行う。

## 4.1 検証方法

### 4.1.1 流れの時間勾配

流れの時間勾配による検証は以下の運動方程式中の各項の寄与度の比較により行う。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + I_{ex} = 0 \quad (6)$$

これらの方程式中の各項の寄与度を ST の計測時刻ごとに算出し、その大きさを比較する。上記のうち、水深および底面の空間勾配は ST の計測値を使用し、その他については前節の 2 項で述べた水理解析の結果を使用した。計算の時間間隔および空間間隔は、ST の時間分解能である 1 分および 2 cm とした。なお、交互砂州上の流れは基本的に平面二次元であるが、水理解析の結果から流速の横断成分は縦断成分を比較して 1/10 以下と小さかったため、本研究においては横断成分を無視した。

### 4.1.2 無次元伝播速度

次に、無次元伝播速度の算出方法について説明する。無次元伝播速度は伝播速度を等流流速で除したものとした。伝播速度は式 (2) を用いて推定した。なお、無次元伝播速度も前項と同様に、横断成分が縦断成分に比べて 1/10 以下であったため、本研究においては横断成分を無視した。

## 4.2 検証結果

図-3 の上から各項の寄与度、無次元伝播速度の時間波形を示す。これらの時間波形は図-1 中の白丸印の箇所における結果を示しており、同図の左から左岸側、中央、右岸側の結果を示している。また、同図中の b) 各項の寄与度は、それぞれ青線が局所項、赤線が移流項、紫線が圧力項、緑線が摩擦項を表している。なお、150 分以降は伝播速度の推定式の適用性は低くなるため、無次元伝播速度を用いた考察の対象外とした。

まず、各項の寄与度の時間波形を見てみると、場所や時間に関わらず移流項、圧力項、摩擦項の 3 つが流れに支配的な一方で、局所項についてはほとんど 0 に近いことが確認できる。上記の 3 つの中で最も寄与度の小さい移流項と局所項を比較しても、局所項の大きさは移流項の  $10^{-4}$  から  $10^{-2}$  程度であり、局所項が極めて微小であることがわかる。このことから、交互砂州スケールの河床波の移動床における流れの時間勾配は無視することは物理的に妥当であることが示唆される。

次に、交互砂州の無次元伝播速度の考察を行う。図-3 の c) を見てみると、左岸側や中央、右岸側にかかわらず、無次元伝播速度は図-2 の底面位の増減と対応して増減していることがわかる。無次元伝播速度の時間波形から、底面

の伝播速度は等流流速と比べて、最大でも  $10^{-3}$  程度であることがわかる。これは既往の理論的研究<sup>1),5)</sup>と同様の結果である。

本実験条件における等流流速は 0.28 m/s 程度、また、式 (2) から、交互砂州の伝播速度は最大でも 0.28 mm/s 程度と推定される。本研究における ST の計測間隔は 1 分であり、局所項の計算の時間間隔も 1 分である。この 1 分間に交互砂州が伝播する距離は 16.8 mm であり、2,3 m 規模の波長を持つ砂州から考えるとその移動距離は微小であり、底面の変化はほとんどないと見做せる。

以上のことから、本研究で対象とした移動床においては擬似固定床の仮定が成立するものと考えられる。

## 5 おわりに

本研究では、模型実験から得た高い分解能の計測値を移動床水理の支配方程式に与えることにより、移動床水理の理論的研究において用いられる擬似固定床の仮定について考察した。本研究で得られた成果を以下に示す。

- 1) 流れの時間勾配が無視し得るものかを流れの運動方程式中の各項の寄与度の大きさの比較により検証した結果、少なくとも交互砂州スケールの河床波においては、どの場所においても流れの時間勾配は無視できるほど十分に小さいことを明らかにした。
- 2) 流れの時間勾配の無視が可能な状態における交互砂州の無次元伝播速度の空間分布を算出したところ、本研究における実験条件においては場所や時刻にかかわらず概ね  $10^{-3}$  から  $10^{-2}$  程度の規模であることが示された。

## 参考文献

- 1) Callander, R. A.: Instability and river channels, *J. Fluid Mech.*, 36: 465–480, 1969.
- 2) 黒木幹男, 岸力: 中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, No. 342, pp.87–96, 1984.
- 3) Colombini M, Seminara G, Tubino M.: Finite-amplitude alternate bars. *J. Fluid Mech.*, 181:213–232, 1987.
- 4) Federici B, Seminara G.: On the convective nature of bar instability. *J. Fluid Mech.* 487:125–45, 2003.
- 5) Colombini, M., and M. Tubino, Finite-amplitude free bars: A fully nonlinear spectral solution, in *Sand Transport in Rivers, Estuaries and the Sea*, edited by R. Soulsby and R. Bettles, pp. 163–169, A. A. Balkema, Brookfield, Vt., 1991.
- 6) 星野剛, 安田浩保, 倉橋将幸: 交互砂州の形成機構の解明に向けた水面と底面の同時計測手法の開発, 土木学会論文集 A2(応用力学), 74 巻 1 号, pp.63–pp.74, 2018.
- 7) 石原道秀, 安田浩保: 交互砂州の発生・発達過程における底面位の伝播速度式の適用性, 土木学会第 23 回応用力学シンポジウム講演概要集, 2020.
- 8) 北海道河川財団, <http://i-ric.org>.