

軌道における初期通り変位のバラツキが及ぼす 温度座屈確率への影響

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 ○岩井 翔
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム 正会員 阿部 和久
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム 正会員 紅露 一寛

1 はじめに

レールの継ぎ目は列車の走行による軌道破壊や振動、騒音を引き起こす軌道の弱点箇所の一つである。その解決策としてロングレールの導入は有効であるが、ロングレールはまくらぎを介し道床により拘束されるため中央部に不動区間を有する。よって、温度変化に伴うレール軸力の発生が不可避となり、夏期の高温時において軌道座屈を生じさせる危険性が高まるという問題を抱えている。近年の気温上昇に伴い従来の管理基準では保守が困難になることが予想される事からも、軌道保守の面においてその挙動の把握が重要となっている。

軸力ゼロの状態からのレール相対温度に対する軌道のつり合い経路の例を図1に示す。現在、軌道管理上の座屈安定性は安全性を十分に考慮して、不安定解が取り得る最低値であるB点の最低座屈強さ(温度)に基づいて評価されてきた。本来、座屈が発生する温度は不安定なつり合い状態に達し、飛び移り座屈を起こすA点であり、その飛び移り座屈温度に基づいた軌道安定性を評価する方が合理的だと考えられる。そのため近年、飛び移り座屈点に基づいた軌道の安定性評価の検討がなされ始めている¹⁾²⁾。

既往の研究においては、解析に使用する軌道モデルの初期通り変位波形を座屈波形に準ずる特定の波形にのみ設定し、確定論的に座屈温度を算出する手法が一般的にとられている。しかし、実際の軌道波形はより複雑な形状をしており、ランダムな初期通り変位波形を与えた軌道での解析の方が現実に即していると言える。また、軌道の座屈温度は初期不整鋭敏性を有し、僅かな通り変位の差であっても飛び移り座屈時の温度は大きく変化する。そのため、初期変位の形状は結果を左右する重要な要素であり、ランダムな軌道形状で解析を行い、座屈温度を確率的に議論すべきであると考えられる³⁾。

そこで本研究では、数値軌道モデルを対象にランダムな初期通り変位波形を有する軌道に温度応力を与え、軌道座屈のモンテカルロシミュレーションを実施し、座屈温度の確率特性を調べる。具体的には、ランダムな通り波形生成の際に規定する距離相関の標準偏差と相関長を変化させ、それらが飛び移り座屈温度の確率分布に及ぼす影響につい

て調べる。また、飛び移り座屈に基づいた軌道の安定性評価の有効性について議論するため、最低座屈温度に対する余裕度を確率的に評価する。

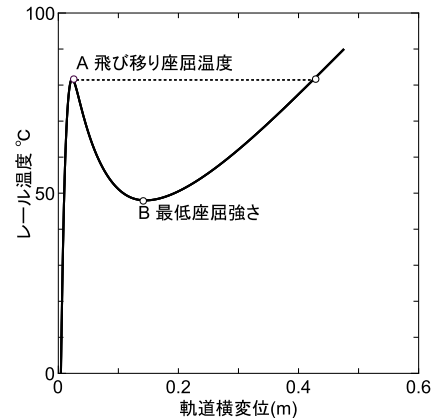


図1 軌道横変位のつり合い経路の例

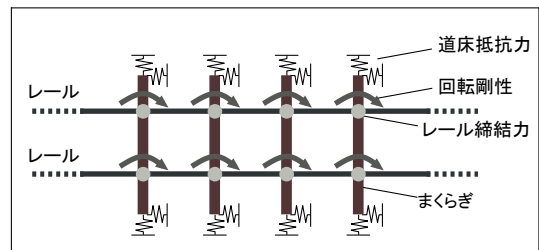


図2 軌道モデル

2 解析手法

2.1 軌道モデル

軌道は図2に示すような左右ロングレールとまくらぎから構成される軌きようによりモデル化する。レールは、横方向のたわみと長手方向の伸縮を考慮した Euler ばり要素で与え、有限たわみ理論のもとに有限要素で離散化する。また、まくらぎは等間隔 L で配置し、横方向と軌道長手方向の変位を考慮した剛な棒として与える。レールとまくらぎの締結部には、回転バネ k_R と横方向バネ k_T を設定した。また、まくらぎに作用する道床横抵抗力 f_T と縦抵抗力 f_L については次の非線形式で与える。

$$\begin{aligned} f_T &= f_{0T} \frac{u_{ST}}{a_T + |u_{ST}|} \\ f_L &= f_{0L} \frac{u_{SL}}{a_T + |u_{SL}|} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで u_{ST} , u_{SL} はまくらぎの横変位と軌道長手方向の変位, f_{0T} , f_{0L} は最終道床横・縦抵抗力, α_T , α_L は作用力が最終道床横・縦抵抗力の 1/2 を与えるときの変位である。ただし, 道床横抵抗力はまくらぎ一本分に対応するのに対し, 道床縦抵抗力は図 2 に示すようにレール一本分 (まくらぎ 1/2 本分) に対応して設定する。

2.2 初期通り変位波形の生成

本研究では, 長さ L の軌道区間において, ランダムな初期通り変位波形を設定する。軌道検測装置により過去に取得された通り変位の 10m 正弦矢データ⁴⁾ から, 原波形の距離相関は概ね次式で表せると推測される。

$$R(x) = \sigma^2 e^{-\left(\frac{x}{l}\right)^2} \quad (2)$$

ここで, σ は通り変位波形の標準偏差, l は相関長である。対象区間を N 等分割し, 各分割点 x_i を次式で設定する。なお $x_0 = 0$ と $x_N = L$ の点において波形振幅はゼロとする。

$$x_i = i\Delta x \quad (i = 0, \dots, N), \quad \Delta x = \frac{L}{N} \quad (3)$$

レール通り変位波形の x_i における値を w_i とし, その離散データを成分とするベクトルを $\{W_0\}$ とすると, 当該ベクトルに関する分散・共分散行列 $[C]$ は次式で与えられる。

$$[C] = E(W_0 \cdot W_0^T) \quad (4)$$

初期通り変位波形ベクトル $\{W_0\}$ を期待値がゼロであり, 且つ式 (5) の分散・共分散行列で与えられる正規確率過程に従うものとする, $\{W_0\}$ は次式により生成することができる。

$$\{W_0\} = [\Phi][\Lambda^{1/2}]\{\xi\} \quad (5)$$

ここで, $[\Lambda^{1/2}]$ は行列 $[C]$ の正の固有値の平方根を対角項に持つ対角行列, $[\Phi]$ はそれに対応する固有ベクトルを縦ベクトル成分に持つ行列である。 ξ は期待値ゼロ, 分散 1 の標準正規分布に従う確率変数ベクトルである。

2.3 モンテカルロ法における軌道座屈解析

本研究では, 式 (2) に従うランダムな通り変位波形を式 (5) に基づき多数生成し, 各々の波形の下で軌道座屈解析を行い飛び移り座屈温度を求めるモンテカルロシミュレーションを実施する。その際の軌道力学解析では, 有限変位理論に基づきレールをはり要素で離散化する。なお, 通り変位をランダムな波形で設定する場合, 座屈発生個所が特定できないため, 所定のはり要素節点のたわみを制御変数とした変位増分解析は適用できない。そこで, 節点変位ベクトルとレール温度とで与えられる一般座標空間において弧長増分法⁵⁾を適用し, つり合い経路上の飛び移り座屈点と最低座屈強さを探索する手法を採った。

2.4 確率密度関数の設定

上記の手法より得られた飛び移り座屈点と最低座屈強さに関する確率密度分布を求める。確率密度関数は有限な分布域を持つベータ分布により作成した。ベータ分布の確率密度関数 $p(t)$ は次式で与えられる。

$$p(t) = \frac{(t-t_1)^{q-1}(t_2-t)^{r-1}}{B(q,r)(t_2-t_1)^{q+r-1}} \quad (6)$$

$$B(q,r) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} \quad (7)$$

ここで, t_1 , t_2 は分布域の下限と上限, q , r は分布のパラメータ, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。

q , r は座屈温度分布の期待値 μ_t と分散 σ_t^2 から次式により決定することができる。

$$q = \frac{\mu_t - t_1}{t_2 - t_1} \left\{ \frac{1}{\sigma_t^2} (\mu_t - t_1)(t_2 - \mu_t) - 1 \right\}, \quad (8)$$

$$r = \frac{t_2 - \mu_t}{t_2 - t_1} \left\{ \frac{1}{\sigma_t^2} (\mu_t - t_1)(t_2 - \mu_t) - 1 \right\} \quad (9)$$

なお, 確率密度関数の分布域の上限値と下限値 t_1 , t_2 は, 得られた確率密度分布とベータ分布により導出した確率密度関数に関してカイ二乗検定により適合度の検定を行い, その評価値が最小となるように最適化して設定している。

3 解析条件

図 2 に示したとおり, 軌道を左右ロングレールと離散まくらぎから構成される軌きょうによりモデル化した。以下の解析では 50kgN レールを想定し, レールや道床横・縦抵抗力に関する各種設定値を表 1 のように与えた。なお, 表 1 において EI , EA , α はレールの曲げ剛性, 伸び剛性および線膨張係数である。

表 1 各種物性値

EI (N·m ²)	6.63×10 ⁵
EA (GPa)	1.32×10 ⁹
α (1/°C)	12×10 ⁻⁶
L (m)	0.6
k_T (N/m)	40×10 ⁶
k_R (N/rad)	2×10 ⁴
f_{0T} (N)	5500
a_T (mm)	1.0
f_{0L} (N)	2500
a_L (mm)	1.0

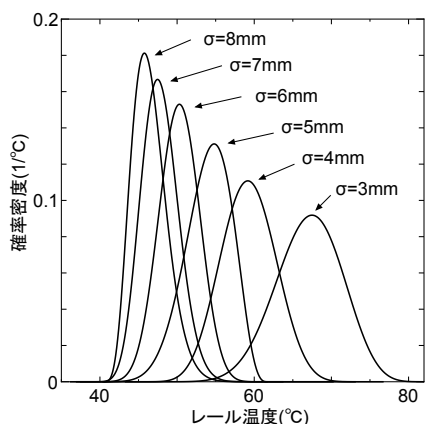


図3 通り変位の標準偏差が飛び移り座屈の確率密度関数に及ぼす影響 ($l = 1.7\text{m}$)

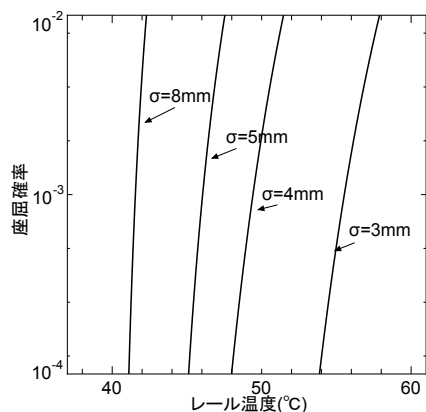


図4 通り変位の標準偏差がレール温度と飛び移り座屈の座屈確率との関係に及ぼす影響 ($l = 1.7\text{m}$)

左右レールともまくらぎ1区間(0.6m)をはり要素で2等分割し、軌道をまくらぎ1200区間(720m)で与えた。軌道座屈解析において、レール両端に固定条件を課す解析事例も見受けられるが、それによる力学条件の擾乱が座屈域や座屈強度などに影響を及ぼす事が懸念される。そのため、本解析では、軌道(レール)両端は変位拘束せず、道床縦抵抗力の作用下で伸縮を許容する様に設定した。

なお、本研究でのモンテカルロシミュレーションにおける解析ケース数が確率分布に及ぼす影響を調べた結果に基づき、以下の計算では解析ケース数を1000として設定した。

4 解析結果

4.1 通り変位波形の標準偏差が座屈確率に及ぼす影響

通り変位波形の距離相関を与える式(2)における相関長を $l = 1.7\text{m}$ で固定し、標準偏差 σ を 3mm から 8mm の範囲で変化させた際の飛び移り座屈の確率密度関数を図3に示す。図より、標準偏差の増加に伴い温度の分布域は低くなる傾向にあり、それと共に確率密度関数の分散も小さくなっている事が分かる。標準偏差 σ の変化に対する座屈温度分布域の低下度合いは、 σ が小さくなるほど顕著となっている。このことより、ランダムな初期通り変位波形を生

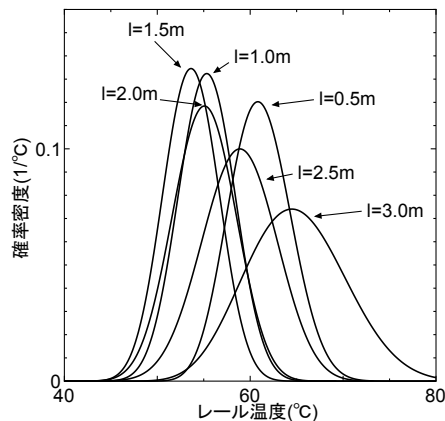


図5 通り変位の相関長が飛び移り座屈の確率密度関数に及ぼす影響 ($\sigma = 5\text{mm}$)

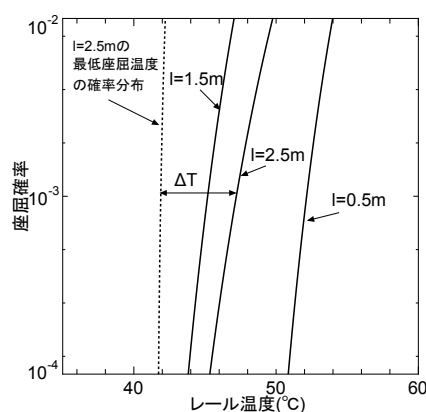


図6 通り変位の相関長がレール温度と飛び移り座屈の座屈確率との関係に及ぼす影響 ($\sigma = 5\text{mm}$)

成した結果、前述した座屈温度の初期不整鋭敏性が変位波形の統計量である標準偏差 σ に反映されている事が分かる。

続いて、レール温度と座屈確率との関係に、通り変位波形の標準偏差 σ が及ぼす影響を図4に示す。なお、図には $\sigma = 3, 4, 5, 8\text{mm}$ の場合を示しているが、確率密度関数と同様に、レール温度と座屈確率との関係には標準偏差 σ に大きく依存することが確認できる。また、図示の座屈確率の範囲内においては、標準偏差 σ の増加に伴う座屈温度の低下量は、座屈確率のレベルによらず概ね一定値を示しており、 σ が 3mm と 8mm では、同じ座屈確率を与えるレール温度に 15°C 以上の差が認められた。

4.2 通り変位波形の相関長が座屈確率に及ぼす影響

式(2)における標準偏差を $\sigma = 5\text{mm}$ で固定し、相関長 l を 0.5m から 3.0m の範囲で変化させた際の確率密度関数を図5に示す。図3の標準偏差を変化させた場合に比べ、設定した相関長の範囲で見ると、相関長 l が確率密度関数の分布域に及ぼす影響は比較的小さい事が分かる。また、レール温度の分布域(期待値)は $l = 1.5\text{m}$ 付近で最小値を示し、その値から遠ざかるほど座屈温度は高くなる傾向にある。これは、座屈波形の主要な波数成分が、 l を 1.5m 付

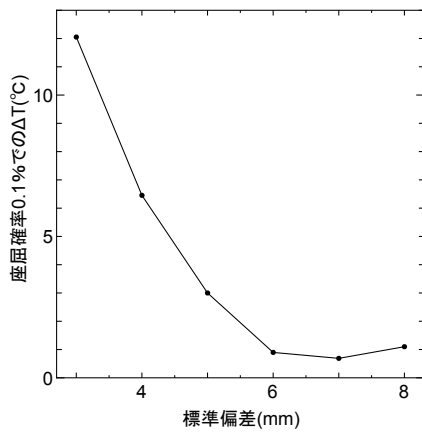


図7 通り変位の標準偏差が飛び移り座屈温度と最低座屈温度の温度差に及ぼす影響 ($l = 1.7m$)

近に設定した場合のランダム波形において最も多く含まれている事によるものと考えられる。

また、図6に示した通り変位の相関長 l がレール温度と座屈確率との関係に及ぼす影響においても標準偏差 σ に比べると、その差は小さい事が分かる。それでも、図示の範囲内で 5°C 以上の温度差が認められ、座屈安定性の評価に当たって適切な相関長の把握も重要となる。

4.3 最低座屈強さに対する余裕度

飛び移り座屈温度に基づいた軌道の安定性評価のために、現在の管理基準である最低座屈温度と飛び移り座屈温度の確率論的な余裕度について検討する。図6の点線で示したのは相関長 $l = 2.5m$ の最低座屈温度の確率分布であり、同確率での飛び移り座屈温度との温度差を ΔT とする。通り変位の標準偏差と相関長を変化させ、得られた最低座屈温度と飛び移り座屈温度の座屈確率が 0.1% における温度差 ΔT を図7、図8に示した。

図7より、標準偏差の増加に従い温度差 ΔT は減少する傾向にある。標準偏差が $5mm$ 以上になると ΔT は 5°C 以下であり、十分な余裕度を確保できているとは言いが、 $4mm$ 以下であれば 5°C 以上のある程度の余裕度を有している事が分かる。

図8より、相関長 $l = 1.5m$ 付近で最小値を取り、 $l = 0.5m$ 以下、または $l = 2.5m$ 以上で 5°C 以上の余裕度を有している事が分かる。また、図示した相関長の範囲内での ΔT の最大値と最小値の差をみると、標準偏差を変化させた場合と比べ変動幅が小さい事が分かる。

ここで、UIC(国際鉄道連合)⁶⁾ の判定基準では、飛び移り座屈温度と最低座屈温度の温度差が 20°C 以上ならば、その差の $1/4$ を最低座屈温度に余裕を持たせた温度として設定している。このように、ある程度の余裕が確認できれば 5°C 以上の緩和ができるとされている。座屈確率 0.1% 時にお

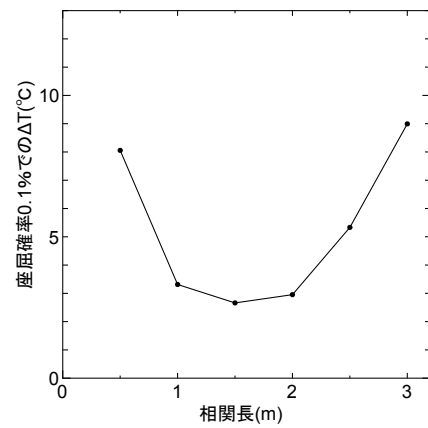


図8 通り変位の相関長が飛び移り座屈温度と最低座屈温度の温度差に及ぼす影響 ($\sigma = 5mm$)

ける飛び移り座屈温度と最低座屈温度の確率論的な温度差が 5°C 以上となるケースが、UICの緩和基準と概ね対応しているものと考えられる。

5 おわりに

本研究では、軌道の初期通り変位波形におけるバラツキが、飛び移り座屈時のレール温度の確率分布特性に及ぼす影響について検討した。そのために、初期通り変位をランダムな波形に設定し、通り変位波形の距離相関における標準偏差と相関長を変化させ、モンテカルロシミュレーションを行った。その結果、標準偏差による影響の方が相関長によるものよりも大きいという事が分かった。

また、飛び移り座屈温度と最低座屈温度との確率論的な温度差を求め、余裕度がどれほど確保できるかを調べた。座屈確率 0.1% で比較した場合、標準偏差が $4mm$ 以下で、相関長が $1\sim 2m$ 以外という条件ならば、 5°C 以上の座屈管理基準の緩和の可能性があると分かった。

参考文献

- 1) 西宮裕騎, 片岡宏夫: 座屈発生点を考慮したロングレールの座屈安定性の評価法に関する一考察, 鉄道工学シンポジウム論文集, 第20号, 9-15, 2016.
- 2) 藪中嘉彦, 高尾賢一, 吉川秀平: 杭工法による道床横抵抗力増加メカニズムと座屈発生点の検証, 鉄道工学シンポジウム論文集, 第23号, 261-266, 2019.
- 3) 阿部和久, 水野雄太, 紅露一寛: 通り変位波形におけるバラツキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響, 第24回鉄道工学シンポジウム論文集, pp.167-174, 2020.
- 4) 千葉颯兵, 阿部和久, 小松佳弘, 紅露一寛: 通り変位測定データに基づくレール軸力推定法に関する理論的検討, J-RAIL2017, CD-ROM, S2-14-4, 2017.
- 5) 岩崎英治, 松野純一, 長井正嗣: 弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法, 応用力学論文集, Vol.5, pp.207-216, 2002.
- 6) Coebraad Esveld: Modern Railway Track Second Edition, MRT Productions, 1989.