

水深波長比に着目した河床波上の流れの鉛直方向流速分布 および水面表出の理論的な判定

新潟大学大学院自然科学研究科 ○正会員 小関 博司
新潟大学災害・復興科学研究所 正会員 安田 浩保

1 はじめに

移動床水理の底面には Micro, Meso, Mega の3つに区分される河床波が形成されることが知られている¹⁾。これらの河床波の3つの区分は、各々の河床波の幾何学的形状に着目した区分と言えるものである。この他の河床波の区分方法として、それぞれの河床波の発生と発達に寄与する物理機構の違いに基づく区分がある。例えば、Colombiniら²⁾や黒木ら³⁾の研究がそれである。Colombiniらは Meso と Mega に区分される各々の河床波の発生は河床抵抗係数とフルード数を指標として区分できることを示した。黒木らは、Mega に区分される河床波の発生の有無は川幅水深比を区分指標として推定できることを示した。しかし、なぜ河床抵抗係数、フルード数、川幅水深比が各種の河床波の区分指標となるかについての説明はない。

上記の3つの区分のうちで最も大きな Mega に区分される交互砂州などの河床波の数理解析には浅水流近似の流れの支配方程式がしばしば用いられ^{3),4),5),6)}、砂州の発生と発達を記述できることが知られている。砂堆などの Meso に区分される河床波の発生と発達の数理モデルによる再現には非静水圧性を考慮した解析⁷⁾もしくは鉛直二次元の解析⁸⁾が望ましいことが報告されている。以上の既往研究を通し、それぞれの河床波の記述に適した数理モデルが浅水流モデルまたは非浅水流モデルであるとの推測が立つ。しかし、著者らの知る限り、どのような数理モデルが各種の河床波の記述に適するかを言明した研究はない上、上記の数理モデルを用いることでなぜ各種の河床波の記述ができるかを物理的に説明した研究もない。

著者らの研究グループは、近年、河床波による起伏形状の水面への表出に着目している。交互砂州が形成される水理条件における模型実験⁹⁾と砂堆と推測される河床波が形成される実河川¹⁰⁾のそれぞれにおいて、底面における河床波と相似形の水面起伏が表出することを実証している。また、著者の一人は、交互砂州の伝播速度は概ね流速の 10^{-2} の規模となることを模型実験での計測と独自の理論式から示している¹¹⁾。これらの成果を重ね合わせると、河床波の伝播速度は極めて緩やかであるために疑似固定床と見な

せる可能性が高く、このために河床波による起伏形状が水面に表出することが示唆される。

水理学では開水路の水底の一部にマウンドが設置されていると、その影響が水面に表出することを教える。逆に、マウンドの高さに対して水深が十分に深い場合には水面に表出しないことがすぐに推測できる。また、マウンドが存在する場合の底面近傍の流線の形状に着目すると、それは水深の深浅に依らずマウンドの形状に従うことも推測できる。類似の関係性は、水面波の性質において見ることができる。水面波は、水表面の水粒子の運動が底面に到達しない深海波と、水粒子の運動が底面に到達する浅水波に区分され、水面波が存在するときの水表面近傍の水粒子の運動は、やはり水深の深浅に依らず水面波の形状に従う。つまり、河床波が水面に表出するかどうか、水面波による水粒子の運動が底面に到達するかどうかは、それぞれ、河床波については底面近傍、水面波については水面近傍における水粒子の運動の鉛直方向の波及規模から把握できることが推測される。

本研究では、河床波上の流れとその鉛直方向の波及規模の説明に対して微小振幅波理論の考え方を大胆に援用し、河床波による起伏形状が水面に表出するかどうかの判定と、各種の河床波を形成したり維持したりする流れの種別を推定できるかを試行する。

2 分散関係式による河床波上の流れの区分

2.1 微小振幅波理論による水面波の区分

水面波の理論の一つである微小振幅波理論では、水深 h と水面波の波長 L_w から成る h/L_w を指標として水面波を深海波と浅水波とに大別する。ただし、 h/L_w を指標とした浅海波と深海波の区分は様々な教科書^{例えば12)}に示される基本的事項であるものの、それらの近似領域は h/L_w を指標として明瞭に二分される性質のものではない。本節では h/L_w を指標とした各近似領域の定量的な区分を試みる。

水面波の運動は、しばしば微小振幅波理論の解を流跡線として記述した説明がなされる。この流跡線を見ると、水面波の波長 L_w により水粒子の運動の水平方向の範囲が規定されることが分かる。これを水深 h で無次元化したもの

が相対波長 h/L_w であり、水面波の基本的性質は微小振幅波理論から導かれる分散関係式

$$\alpha^2 = gk \tanh[kh] \quad (1)$$

を用いて記述される。ここに、 α は周波数、 g は重力加速度、 k は波数である。また、波速 c は α 、 k を用いると、

$$c^2 = \frac{\alpha^2}{k^2} = \frac{gL_w}{2\pi} \tanh[2\pi h/L_w] = \frac{gL_w}{2\pi} A \quad (2)$$

$$A = \tanh[2\pi h/L_w] \quad (3)$$

となる。

深海波のとき、 $h \gg L_w$ 、 $h/L_w \rightarrow \infty$ であるため、

$$A = \tanh(2\pi h/L_w) \simeq 1 \quad (4)$$

極浅海波のとき、 $h \ll L_w$ 、 $h/L_w \rightarrow 0$ であるため、

$$A = \tanh(2\pi h/L_w) \simeq 2\pi h/L_w \quad (5)$$

となる。

図-1 に式-(3)、(4)、(5) の関数形を示した。同図の背景に $0 \leq h/L_w \leq 1.0$ の範囲を示し、同図右下に $0 \leq h/L_w \leq 0.3$ の範囲を拡大して示した。赤線が式-(3) の微小振幅波理論の厳密解、青線が式-(4) の極浅海波近似の解、緑線が式-(5) の深海波近似の解である。本研究では、図-1 に示した極浅海波領域、遷移領域、深海波領域の3つの領域の関数形の比較から、 h/L_w に基づき、これら3つの領域を

$$\text{極浅海波領域} : 0 \leq h/L_w \leq 0.1 \quad (6)$$

$$\text{遷移領域} : 0.1 \leq h/L_w \leq 0.3 \quad (7)$$

$$\text{深海波領域} : 0.3 \leq h/L_w \quad (8)$$

と区分することとした。極浅海波領域は厳密解と極浅海波近似の解が近接している領域、深海波領域は厳密解と深海波近似の解が近接している領域である。また、一般に遷移領域の明瞭な区分は困難とされるが、本研究では、図-1 に赤線で示した厳密解の関数形が急増する $h/L_w \simeq 0.15$ を目安として区分することにした。

2.2 水面波による流線の湾曲の鉛直方向の波及規模

図-2 は、平坦床上において波長 L_w の水面波（青線）が発生し、定常流を仮定した場合の流線（緑線）の湾曲が水面から鉛直下向きに伝わる様子を模式的に示したものである。水面波による水面近傍の水粒子の運動の鉛直方向の波及規模は、微小振幅波理論の解より $e^{2\pi z/L}$ に比例し、概ね半波長分 $L_w/2$ の水深まで到達することが分かる。

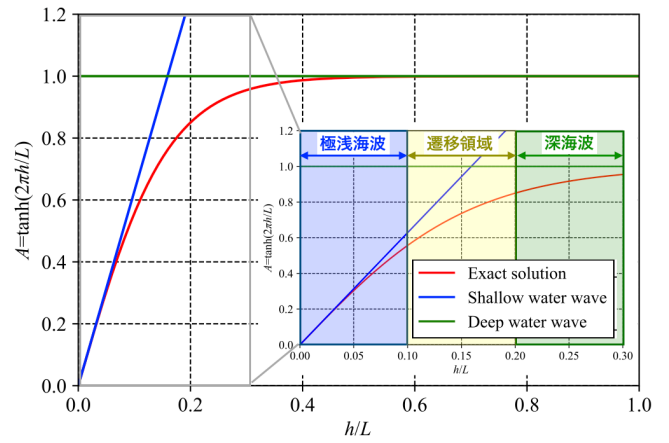


図-1 微小振幅波理論による流れの種別を表す曲線と領域

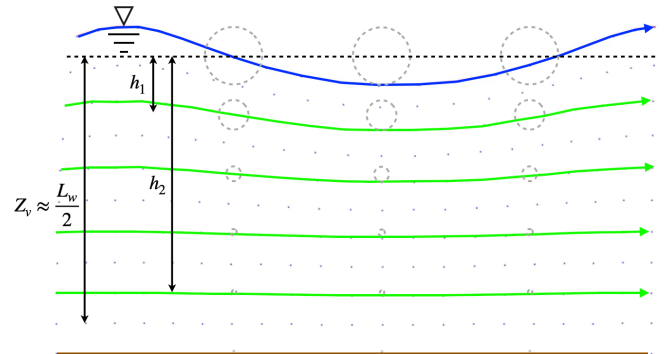


図-2 水面波における流跡線と定常運動の永續を仮定した場合の流線の鉛直方向の波及範囲

水面波による水粒子の運動の説明には図-2 中の灰色の点線で示した流跡線が常用される。ここで、ある時刻の水粒子の運動の定常状態が永續することを仮定すると、それは図-2 中の緑色の実線で示した流線での表現となり、その時の流線の湾曲の鉛直方向の波及規模は図-1 中の各領域と次のように対応する。まず、水深 h_1 において h_1/L_w が極浅海波領域の場合、水面からその水深まで一様に水平・鉛直運動するため、図-2 のように水面と同規模の湾曲の流線が現れる。つぎに、水深 h_2 において h_2/L_w が深海波領域の場合、水面における運動の影響は到達しないため、図-2 のように流線は水平となる。このように、水面波による流線の湾曲の波及規模は有限となることが推測され、その範囲は h/L_w に基づき把握できることが示唆される。

2.3 河床波による流線の湾曲の鉛直方向の波及規模

前節の考え方は、水面における流線の湾曲の鉛直下向きへの波及規模の把握だけに限定されるものではないであろう。河床波が存在することを起因とした底面近傍の流線の湾曲の鉛直上向きへの影響の把握にも適用できることが推測される。また、著者らの知る限り、水面が底面における河床波と相似形となることを実証した先行研究はないよう

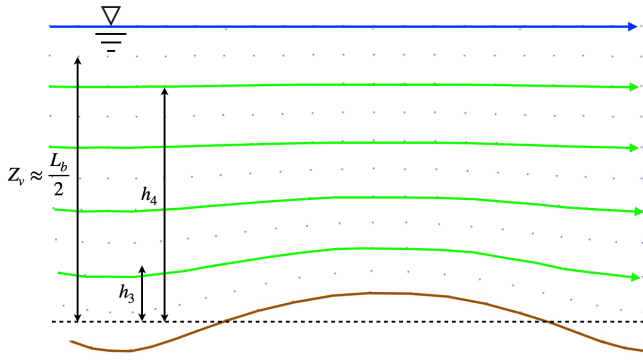


図-3 河床波近傍における流線の鉛直方向の波及範囲

であるが、著者らの研究グループではその実測に成功^{9),10)}している。この他、著者の一人は、交互砂州の伝播速度は概ね流速の 10^{-2} の規模となることを模型実験の高分解能な計測と独自に構築した理論式の二方向から示し¹¹⁾、少なくとも Mega に区分される河床波においては疑似固定床の仮定が成立する裏付けを得ている。

これらを照らし合わせると、波長 L_b をもつ河床波による流線の湾曲の鉛直上向きの波及規模は、図-3 に示したように、水面波の水粒子の運動と同様に河床面から $L_b/2$ まで波及することが推測される。つまり、河床波の形状が水面に表出するかどうかは、 h/L_b を指標として推測できることが示唆される。また、そこでの流れが浅水流か否かについての推測もできることが示唆される。

具体的には、まず、水深 h_3 において h_3/L_b が極浅海波領域の場合、流線の湾曲は河床起伏と同規模となり、そこが水面であった場合に河床と同波長の起伏が水面に表出することが推測される。水面と底面の位相はフルード数に依存するものの、河床波と水面波の波長が一致していれば流れの状態が浅水流であることが推測できる。

また、水深 h_4 において h_4/L_b が深海波領域の場合、河床近傍の流線の湾曲が水面に到達することはなく、図-3 のように流線は水平となり、水面に河床波の形状は表出しない。このことは、この時の流れの種別は、深海波における水深方向の流速分布から類推できることを示唆し、水深方向の流速分布を有する非浅水流であることが推測できる。

3 各種の河床波を形成する流れ種別の推定

本章では、Meso と Mega に区分される河床波を形成したり維持したりする流れの種別について、前章までに示した h/L_b を指標とした推定を試行する。

3.1 河床波の縦断方向波数に基づく流れの種別

Colombini ら²⁾ は各種の河床波の幾何学形状の縦断・横断方向の波数をそれぞれ k_x 、 k_z とし、それらを次のよう

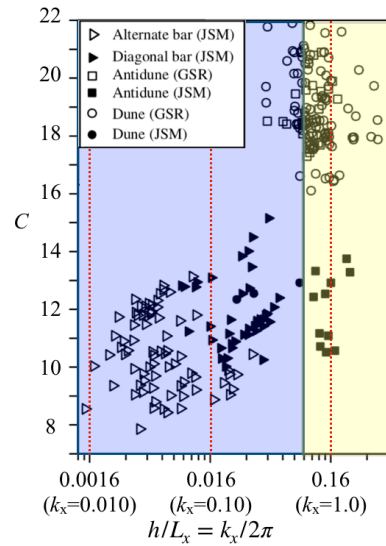


図-4 各種の河床波における縦断方向の幾何学形状と微小振幅波理論による近似領域 (Colombini ら²⁾ の Fig.1(b) に加筆

に定義した上で、これらと河床抵抗係数の関係を整理した。

$$k_x = \frac{2\pi h}{L_x} \quad (9)$$

$$k_z = \frac{2\pi h}{L_z} = \frac{2\pi h}{4W} = \frac{\pi h}{2W} \quad (10)$$

ここに、 L_x は縦断方向の波長、 L_z は横断方向の波長、 W は川幅である。なお、本研究の以降の記述では、 k_x や k_z を h/L_x 、 h/L_z に書き換えて示した。また、 h/L_z は、黒木ら³⁾ が Mega とそれ以外の河床波の発生条件を分類するための指標とした川幅水深比 W/h の逆数である。

図-4 は h/L_x と抵抗係数 C の関係を示し、図-1 における極浅海波領域と遷移領域をそれぞれ青色と黄色で示した。

まず、単列砂州や交互砂州は青色で示した極浅海波領域の内部に分布していることが分かる。図-4 から少なくとも砂州の発生時における支配的な流れは浅水流であることが推測され、比エネルギーの考え方に基づくと、底面の砂州の形状が水面に表出する可能性が示唆される。これは、著者らが実施した砂州の発生と発達に模型実験において水面と底面の形状とが対応する計測結果を得たこと⁹⁾ と合致する。

つぎに、砂堆と反砂堆についてであるが、多くのプロットは $0.048 \leq h/L_x \leq 0.32$ 、つまり極浅海波領域の中でも遷移領域寄りから遷移領域の内部に分布している。既往の砂堆の発生と発達についての数値解析に関する研究^{7),8)} は、非静水圧性の影響や、砂堆の波峰における流れの剥離などの鉛直方向の流速分布を記述できる数理モデルの必要性を示唆している。図-4 において浅水流の仮定から次第に乖離する遷移領域に位置することと数値解析に関する研究が

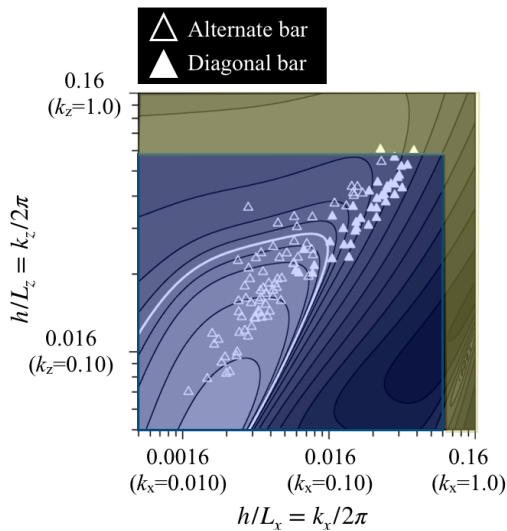


図-5 砂州の縦断・横断方向の幾何学形状と微小振幅波理論による近似領域の関係 (Colombini ら²⁾ の Fig.5 (a) に加筆)

ら、砂堆・反砂堆における流れの種別は、非浅水流である可能性が高いことが推察される。

3.2 砂州上の縦断・横断方向の波数に基づく流れの種別

図-5 に、 h/L_x と h/L_z の関係を示す。図中の青色と黄色の塗りつぶしは図-1 と同様である。図-5 において交互砂州 (中抜白三角) と複列砂州 (白塗りつぶし三角) の実験結果を示し、 h/L_x と h/L_z の両者ともに極浅海波領域に分布している。つまり、水面波の理論の観点から、砂州の発生と発達の数理解析における流れのモデルとして浅水方程式を適用する合理性が認められる。また、浅水方程式から算定される水理量に基づく河床変動の数理解析の合理性も示唆される。

3.3 中規模河床波の領域区分図における流れの種別

中規模河床波 (Mega) の発生条件を検討した研究の一つとして黒木らの研究³⁾がある。彼らは、平面的な浅水流れにおける線形安定解析を行い、砂州非発生、単列砂州、複列砂州の発生領域は、横断方向の川幅水深比 W/h と無次元掃流力 τ_* を用いて区分できることを示した。

図-6 は彼らの論文³⁾の Fig.5 に図-1 の各領域を重ねた図である。横軸に3種類の値を示しており、1) h/L_z 、2) W/h 、3) 河床勾配 $i=1/500$ とした場合の $Wi^{0.2}/h$ である。黒木らの区分図における単列砂州と複列砂州のそれぞれの領域はどちらも極浅海波領域に含まれることが分かる。つまり、前節までの結果と同様に、砂州を形成したり維持したりする流れの種別は浅水流であることが示唆される。また、砂州非発生の領域は、 W/h が小さくなるに従って微小振幅波理論における極浅海波から遷移領域へ向い、浅水流の仮定から次第に乖離していく領域である。前節までの考

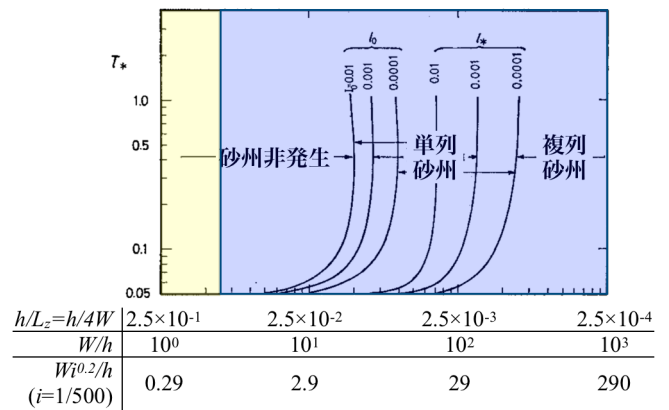


図-6 中規模河床波の発生における流れの種別 (黒木ら³⁾ の Fig.5 に加筆)

察を踏まえると、砂堆などの Meso の河床波の発生領域を表す可能性が高い。

4 おわりに

本研究では、常用されている幾何学的形状に着目した各種の河床波に対して、水面波の運動から着想を得た流体力学的な考察を行った。その結果、各種の河床波の波数に着目することで、その発生や維持に寄与する流れの種別を推定でき、その幾何学形状の水面表出の有無を把握ができることが分かった。

参考文献

- 1) G. Seminara, Fluvial Sedimentary Patterns, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 42, pp. 43-66, 2009.
- 2) Colombini, M. and Stocchino, A.: Three-dimensional river bed forms, *J. Fluid Mech.*, Vol. 695, pp. 63-80, 2012.
- 3) 黒木幹男, 岸力, 中規模河床波の領域区分に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 第 342 号, pp. 87-96, 1984.
- 4) Callander, R. A., Instability and river channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 36, pp. 465-480, 1969.
- 5) Colombini, M., Seminara, G., and Tubino, M.: Finite-amplitude alternate bar, *J. Fluid Mech.*, Vol. 181, pp. 213-232, 1987.
- 6) 例えば, 清水康行, Marco, T., 渡邊康玄, 自由砂州と固定砂州の共鳴条件における河床変動計算, 水工学論文集, 第 36 巻, pp. 15-22, 1992.
- 7) 音田慎一郎, 細田尚, 水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析, 水工学論文集, 第 48 巻, pp. 973-978, 2004.
- 8) Giri, S. and Shimizu, Y., Numerical computation of sand dune migration with free surface flow, *Water Resour. Res.*, Vol. 42, 2006.
- 9) 星野剛, 安田浩保, 倉橋将幸, 交互砂州の形成機構の解明に向けた水面と底面の同時計測手法の開発, 土木学会論文集 A2(応用力学), 74 巻, 1 号, pp. 63-74, 2018.
- 10) 安田 晃昭, 萬矢 敦啓, 小関 博司, 安田 浩保, カメラ同期制御装置を用いた近接写真測量による水面形状の計測, 河川技術論文集, 第 25 巻, 2019.
- 11) 石原道秀, 安田浩保: 交互砂州の流下状態の理論的評価について, 土木学会関東支部新潟会, 2019 (印刷中).
- 12) 日野幹雄: 流体力学, 朝倉書店, 1992.