河床波の伝播速度の時空間分布の理論的な評価

新潟大学大学院自然科学研究科　○学生会員　石原 道秀
新潟大学災害・復興科学研究所　正会員　安田 浩保

1　はじめに

河川の底面には周期的な起伏形状が自律的に形成される．この起伏形状は伝播する性質があるために波動現象の一種と見做されて河床波と呼ばれており，その幾何学形状の大小に応じて3つに区分される．このうち，Mega scale の河床波に区分される交互砂州は，既往の研究においてその波長や波高の増大に伴って伝播速度が緩慢になること [1),2),3),4)] や，一方向性の伝播の性質が報告 [5)] されている．現状での理解はこの水準に留まり，そもそもなぜ交互砂州が伝播するかや，なぜ伝播速度が緩慢となるかなどの本質的な性質については不明である．

一般的に土砂水理の数理解析は流水と流砂の支配方程式を連立して行われる．底面の連続の式として常用される Exner 式を底面位 z についての双曲型偏微分方程式へ書き換えができれば，底面の起伏形状についての波動方程式を得たことに該当し，交互砂州の伝播速度の時間・空間分布の把握が見込める．模型実験の条件設定 [6)] や数値計算の安定性 [7)] の把握を目的として同種の双曲型偏微分方程式を用いた先行研究があるものの，同式により河床波の伝播速度を評価した前例は著者らの知る限りない．また，移動床水理の数理解析では，底面の変化は流れに比べて十分に緩やかな疑似固定床と見做し，準定常の流れを仮定することが多い [例えば7)]．しかし，移動床水理において準定常の仮定が常に成立するかについての実証はされていない．本研究では，まず，流れの非定常性の考慮の有無を検討しながら底面の起伏形状についての双曲型偏微分方程式を導出する．つぎに，同式における伝播速度の理論式の妥当性を明らかにした上で，現時点では定性的にしか分かっていない交互砂州の伝播速度の時間・空間分布について論じる．

2　河床波の伝播速度の理論式の導出

Exner の式から双曲型偏微分方程式への書き換えにあたっては水面形方程式を用いる．一般的に水面形方程式は不等流の式から導かれたものである．しかし，移動床水理における流れの非定常性についての十分な実証は行われていない．このため，移動床水理の全般どころか砂州の発生と発達の数理解析においてさえ流れの非定常性の考慮の是非は明確となっていない．本章では，まず，流れの非定常性を考慮した水面形方程式（以下，非定常の水面形方程式）を導出し，次に，定常と非定常の水面形方程式のそれぞれを組み込んだ底面の起伏形状についての双曲型偏微分方程式と，伝播速度の理論式を導く．

2.1　非定常の水面形方程式の導出

本節では，以下に示す流れの連続式および流れの運動方程式を連立して非定常の水面形方程式の導出した．

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial [hu]}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}+I_e=0 \tag{2}$$

ここで，h は水深，t は時間，u は流下方向成分の流速，x は流下方向の距離，g は重力加速度，z は底面高，I_e はエネルギー勾配である．まず，式 (1) より積の微分法則から，以下の式 (3) が得られる．

$$\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{3}$$

次に，Manning 式および合成関数の微分より式 (3) は，

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{5}{2}h\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4}$$

となり，式 (4) の第一項の時間微分についても，Manning 式および合成関数の微分を用いて同様の変形を行うと，以下の式 (5) が得られる．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{5}{3}u\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5}$$

上式を式 (2) の流れの運動方程式の第一項へ代入すると，

$$-\frac{2}{3}\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}+I_e=0 \tag{6}$$

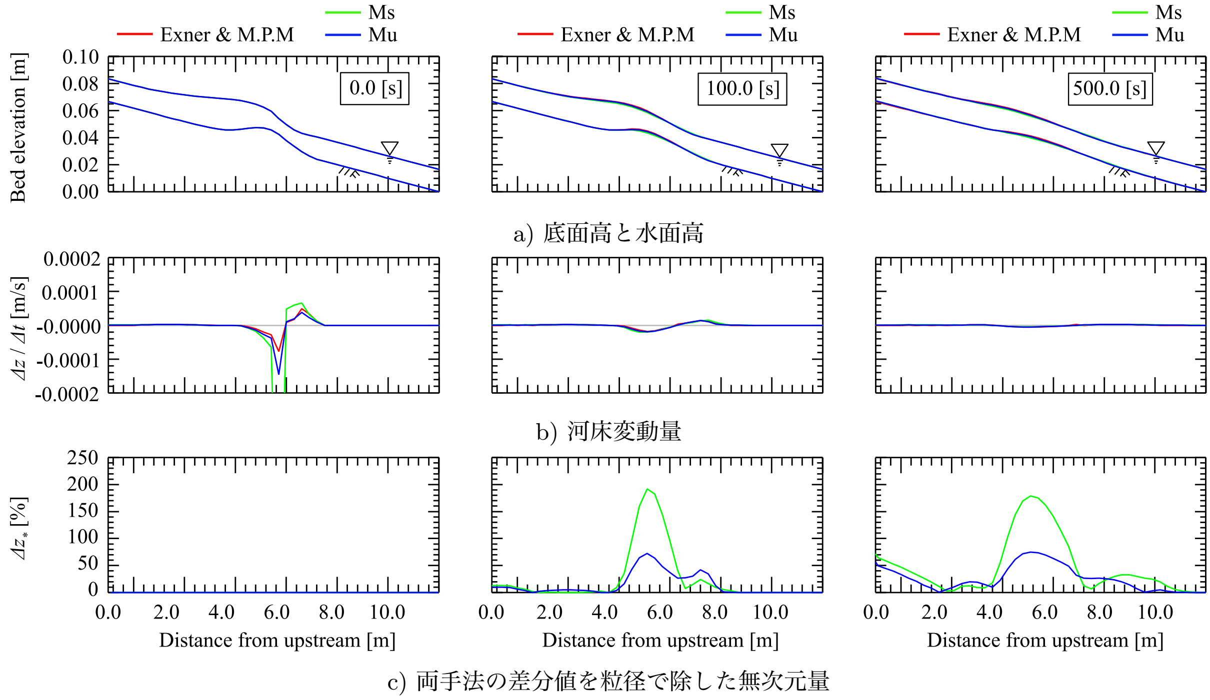
式 (6) が得られる．また，式 (6) の第一項の $\partial u/\partial x$ についても Manning 式および合成関数の微分を用いて得られる

$$\frac{\partial u}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{2}{3}\frac{u}{h}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{7}$$

式 (7) を式 (6) へ代入し，式を整理すると，

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}-I_e}{1-\frac{4}{9}Fr^2} \tag{8}$$

流れの非定常性を考慮した水面形方程式が導出できる．ここで，Fr はフルード数である．



図–1 一次元河床変動解析の結果の縦断分布（左から 0.0 秒，500.0 秒，1000.0 秒時点の結果）

2.2 底面の起伏形状の双曲型偏微分方程式と，河床波の伝播速度の理論式の導出

本節では，前節で導出した流れの非定常性を考慮した水面形方程式と一般的な定常の水面形方程式のそれぞれを組み込んだ底面の起伏形状の．双曲型偏微分方程式を導出する．同式の導出では，主に河床連続式に掃流砂のみを考慮した式 (9) の Exner 式，流砂関数，水面形方程式の 3 つの式を用いる．流砂関数に式 (10) の Meyer-Peter and Müller 式 (以下，M.P.M 式)，無次元掃流力に式 (11) を用いた．

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda}\frac{\partial q_B}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

$$q_B = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2}\sqrt{sgd^3} \tag{10}$$

$$\tau_* = \frac{n^2u^2}{sdh^{1/3}} \tag{11}$$

ここで，z は底面高，t は時間，λ は河床空隙率，q_B は掃流砂量，x は流下方向の距離，τ_* は無次元掃流力，τ_{*c} は限界無次元掃流力，s は砂粒子の水中比重，g は重力加速度，d は粒径，n は粗度係数，u は流下方向成分の流速，h は水深である．

まず，式 (9) 中の $\partial q_B/\partial x$ は合成関数の微分から以下のようになる．

$$\frac{\partial q_B}{\partial x} = \frac{\partial q_B}{\partial \tau_*}\frac{\partial \tau_*}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{12}$$

式 (12) 中の各偏微分の結果は以下の通りである．

$$\frac{\partial q_B}{\partial \tau_*} = 12(\tau_* - \tau_{*c})^{1/2}\sqrt{sgd^3} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \tau_*}{\partial h} = -\frac{1}{3}\frac{I_e}{sd} \tag{14}$$

$\partial h/\partial x$ については，式 (8) を用いる．

式 (9),(10),(11),(12) を整理すると，以下の双曲型偏微分方程式が得られる．

$$\frac{\partial z}{\partial t} + M\frac{\partial z}{\partial x} = -MI_e \tag{15}$$

同式の空間微分項に付与される M は関数 z の移動速度を示すもので，

$$M_u = \frac{4(\tau_* - \tau_{*c})^{1/2}\sqrt{sgd^3}I_e}{sd(1-\lambda)(1-Fr^2)} \tag{16}$$

により河床波の伝播速度の記述ができるものと推測され，その支配変数は τ_*，Fr，I_e であることがわかる．

また，定常の水面形方程式を用いた場合，河床波の伝播速度は，以下の式となる．

$$M_s = \frac{4(\tau_* - \tau_{*c})^{1/2}\sqrt{sgd^3}I_e}{sd(1-\lambda)(1-Fr^2)} \tag{17}$$

なお，上記の導出に先立ち，平面二次元の水理解析を用いて交互砂州上の流速および無次元掃流力の縦・横断成分の大きさを比較している．その結果，横断方向成分は，縦断方向成分に対して 1/10 程度だった．この結果は，先行研究 [7] の仮定と一致する．つまり，少なくとも交互砂州の伝播速度の算定の範囲であれば横断方向成分を無視した一次元の河床波の伝播速度の理論式の有用性が見込める．

2.3 河床波の伝播速度の理論式の妥当性

式 (9) と前節で導出した式 (15) は数学的な変換しただけのために本質的な差異はない．従って，式 (9) と， M に式 (16) か式 (17) を用いた式 (15) の三者の未知量 $\partial z/\partial t$ は理論的には一致しなければならない．本節では，一次元の河床変動計算を，式 (9) と， 式 (15) の左辺第 2 項の M に式 (16) と式 (17) を用いた三者で行い，計算結果を比較した．計算条件は，底面高は全長 12.0 m，流路幅 0.45 m，水路勾配 1/200 の直線矩形断面水路を設定し，そこに長さ 4 m，高さ 0.02 m のマウンドを設置とした．水理計算は，上流端境界条件に流量 1.7 L/s，下流端境界条件は等流水深とし，初期条件は上・下流端の境界条件を用いた不等流計算の結果を与えた．

図–1 に計算結果を示した．同図の上から順に a) 底面高と水面高，b) 河床変動量，c) 式 (9) での河床高に対する式 (16) の M_s および式 (17) の M_u 式での河床高の差分値を粒径で除した無次元量 (以下，緑色を Δz_{s*}，青色を Δz_{u*} と記す．) である．同図の左図 0 秒における b) 河床変動量に着目すると，三者とも堆積と洗堀の傾向は同じであるものの，式 (9) に対して式 (16) の M_s，式 (17) の M_u ともに計算結果が過大評価気味となる．ただし，c) に示すように Δz_{s*} および Δz_{u*} の差異は小さい．その後，時間が経過していくと中図 100 秒，右図 500 秒にかけては b) 河床変動量はどの式の差異も小さいことがわかる．しかし，c) に着目すると，100 秒，500 秒にかけて Δz_{s*} および Δz_{u*} が増大しており，特に Δz_{s*} が 200%と粒径の 2 倍以上の差異となる．一方で，Δz_{u*} の場合での差異は 0 ではないものの粒径の 1 倍以内で収まり，式 (17) の M_s よりも式 (16) の M_u は式 (9) と近い結果となる．

上記のまでのことから，河床波の伝播速度の理論式における流れの非定常性の考慮の重要性とともに，河床波の伝播速度の算定式としての式 (16) の妥当性が示された．

3 交互砂州の伝播速度の時間・空間分布

交互砂州の伝播速度の空間分布とその時間変化は，現時点では定性的にしか分かっていない．本章では，交互砂州の伝播速度の空間分布とその時間変化について，上記までに妥当性が確認された式 (16) を用いて考察する．

3.1 交互砂州の発生・発達の過程の高分解能な測定

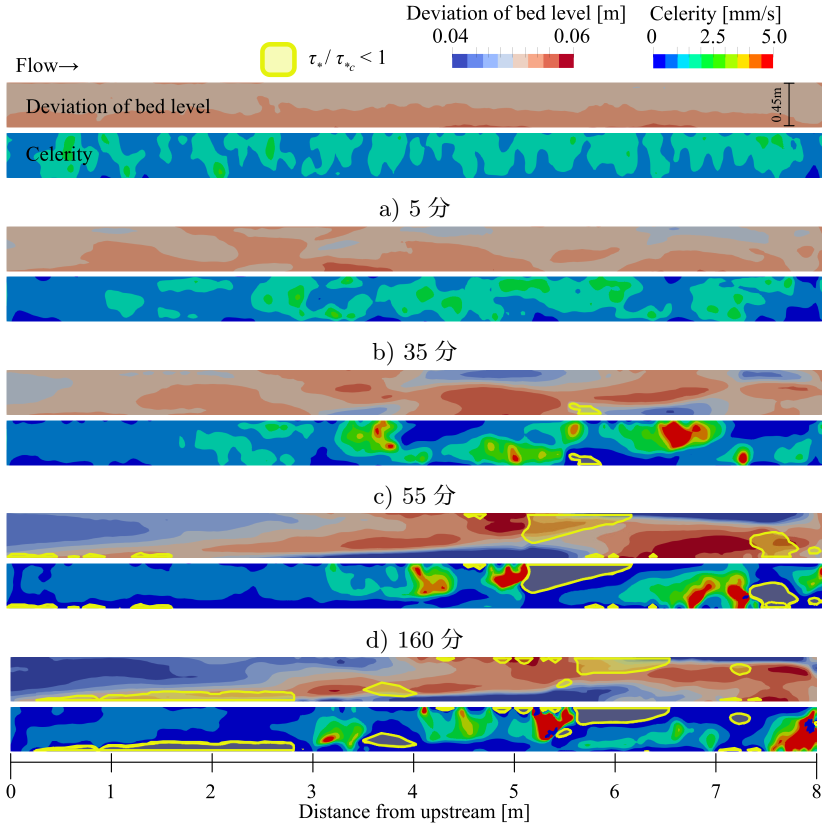
本節では，交互砂州の発生・発達の過程における水位と底面位を高分解能に測定する模型実験を実施した．模型実験に用いた水路は，全長 12.0 m，流路幅 0.45 m，水路勾配 1/120 の直線矩形断面水路である．上流端から 2.0 m の助走区間を設け，そこから下流側へ 8.0 m の区間に平均粒径 0.76 mm の 4 号硅砂を 5cm の厚さで均一に敷き詰め，これを初期河床とした．水理条件は交互砂州の発生を狙い，黒木・岸[8] の中規模河床形態の領域区分を参考に交互砂州の発生領域に設定した．この時の流量は 1.7 L/s，$BI_0^{0.2}/h_0$ は 14.5，無次元掃流力は 0.079，給砂条件は無給砂で行った．通水時間は交互砂州が発達し，伝播と形状変化が緩慢となることが確認された 4 時間まで行った．通水中は，光切断法を計測原理とする水位と底面位の同時かつ高解像度な計測法 Stream Tomography(以下，ST) を用いて，5 分間隔で水面と底面の形状を計測した．水位と底面位の計測解像度は縦横断方向ともに 2cm 間隔とした．ST による水位と底面位の計測手法の詳細，計測装置の概要は別報[9] を参照されたい．

3.2 交互砂州の発生・発達の過程の流速の推算

式 (16) による伝播速度の算定にあっては交互砂州上の流速が必要となるものの，前節の模型実験で用いた ST は水位と底面位の幾何学形状の計測に留まる．このため，ST で計測した底面形状ごとに平面二次元水理解析を行って流速を推算した．この水理解析のソルバーには iRIC[10] に同梱される Nays2D を用い，固定床の平面二次元の水理解析を行った．計算点の配置間隔は縦横断方向ともに 2 cm，上流端境界条件は流量 1.7 L/s，下流端境界条件は等流水深とした．粗度係数はマニングストリクラー式から得られる 0.015 とした．

3.3 交互砂州の伝播速度の時間・空間分布

図–2 の上図に底面起伏，下図に式 (16) で推定した伝播速度の平面図を示す．図中の黄色の線で囲まれた範囲は，無次元掃流力が限界無次元掃流力を超えていない箇所を示しており，理論上の伝播速度は 0.0 mm/s である．底面起伏が平坦床に近く，流れの状態が等流に近い，同図中の a) 通水開始から 5 分における伝播速度の空間分布は小さく，ほぼ一様に 1.5 mm/s であることがわかる．b) 通水開始から 35 分が経過すると，底面形状はわずかに起伏を持つようになり，それに対応するように伝播速度は空間分布を有するようになる．その後，交互砂州が明瞭に発達した c) 通水開始から 55 分の時点では，有効無次元掃流力が 1 を下回る箇所が生じ，それに伴って底面形状に対応するように伝播速度の空間分布が明瞭となる．初期の 1.5mm/s 程度の伝播速度から大きく変化した箇所と増減の規模は，1) 洗掘部における 0.0 から 0.75 mm/s への減少，2) 砂州前縁部における 4.0 から 5.0 mm/s 程度への増加である．これら以外の箇所の伝播速度は 1.0 mm/s 程度となり，初期に比べて 7 割程度まで減少していることが分かった．



a) 5 分

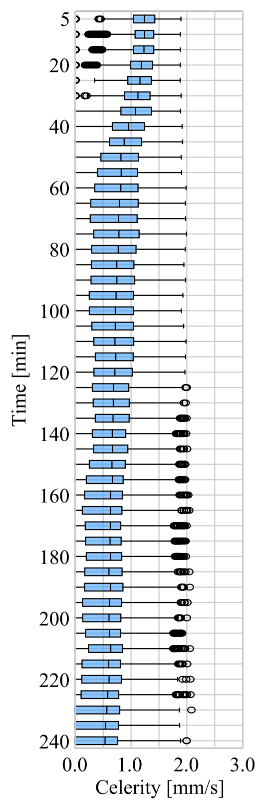
b) 35 分

c) 55 分

d) 160 分

e) 240 分

図–2 上図：底面起伏，下図：河床波の伝播速度の空間分布



図–3 河床波の伝播速度の時間変化

図–3 に**図–2** に模型実験の測定範囲の全体で平均した伝播速度の時間変化を箱ひげ図を示した．通水初期 5 分は伝播速度の最小値から最大値の範囲が狭く，伝播速度はほぼ均一であることがわかる．その後，時間経過に伴って底面形状が変化していくと，明瞭な伝播速度の空間分布を持つようになり，通水初期 5 分と最終時刻 240 分を比べると，伝播速度の中央値はほぼ半減し，また第 1 四分位から第 3 四分位も同様に減少し，交互砂州の伝播速度は全体的に減少していることがわかった．

4 結論

交互砂州の伝播速度の空間分布とその時間変化は，現時点では定性的にしか分かっていない．本研究では，流れの非定常性を考慮した河床波の伝播速度の理論式を導出した上で，交互砂州の伝播速度の空間分布とその時間変化について考察した．本研究で得られた成果を以下に示す．

1) 交互砂州の伝播速度は，平坦床から交互砂州の発達につれて明瞭な空間分布を有するようになり，十分に発達した交互砂州の伝播速度は初期に比べて半減する．

2) 導出した交互砂州の伝播速度の理論式は，交互砂州の発生から発達にかけての交互砂州の伝播速度の明瞭な時空間分布を良好に推定できる．

参考文献

1) 木下良作，石狩川河道変遷調査，科学技術庁資源局資料，第 36 号，科学技術庁資源局，1963.

2) Crosato, A., E. Mosselman, F. Beidmariam Desta, and W. S. J. Uijttewaal 2011 Experimental and numerical evidence for intrinsic nonmigrating bars in alluvial channels, *Water Resour. Res.*, 47, W03511, doi:10.1029/2010WR009714.

3) J.P.C. Eekhout et al. Field experiment on alternate bar development in a straight sand-bed stream, *Water Resour. Res.*, VOL. 49, 8357–8369, doi:10.1002/2013WR014259, 2013.

4) Defina, A. Numerical experiments on bar growth, *Water Resour. Res.*, VOL. 39, NO. 4, 1092, doi:10.1029/2002WR001455, 2003.

5) Federici B, Seminara G. On the convective nature of bar instability. *J. Fluid Mech.* 487:125–45, 2003.

6) 藤田裕一郎，小池剛，古川隆司，村本嘉雄，交互砂州の発生過程に関する二，三の実験，京都大学防災研究年報，第 28 号 B–2，1986.

7) 黒木幹男，岸力，清水康行，河床変動の数値計算法に関する研究，第 17 回自然災害科学総合シンポジウム，pp.175–pp.178, 1980.

8) 黒木幹男，岸力：中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究，土木学会論文報告集，No. 342，pp.87–96，1984.

9) 星野剛，安田浩保，倉橋将幸，交互砂州の形成機構の解明に向けた水面と底面の同時計測手法の開発，土木学会論文集 A2(応用力学)，74 巻 1 号，pp.63–pp.74，2018.

10) 北海道河川財団，http://i-ric.org.