

# レール温度履歴が通り変位軸力推定法に及ぼす影響

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 佐藤拓郎  
新潟大学工学部 正会員 阿部 和久  
東日本旅客鉄道（株） 正会員 清水 彰久  
新潟大学工学部 正会員 紅露 一寛

## 1 はじめに

鉄道におけるロングレール軌道は定尺レールに比べ大きな軸力が作用するため、道床横抵抗力と軸力は維持管理上重要な指標となっている。しかし、従来の軸力測定法は多くの労力を必要とし、頻度と間隔には制約が伴う。一方、本研究では、在来線の営業車両に搭載された検測装置による通り変位の計測データ<sup>1)</sup>を活用した高頻度軸力測定法の開発を試みている<sup>2)</sup>。これにより、理論モデルを対象とする限り、測定データにノイズが含まれていても、通り変位からレール軸力と道床横抵抗力とがある程度推定可能である。しかし、推定法の基本となる数理モデルと実際の軌道とは相違点が存在する。例えば、理論では道床横抵抗力を一様な連続分布の線形ばねにより表現している。一方、実際の軌道は、まくらぎを介して離散的に拘束されており、道床からの抵抗力はバラツキを持ち、強い非線形性を有する。さらに、レール軸力は設定時からの長期に亘る温度履歴を受けており、前述の非線形関係を有する通り変位と道床からの作用力も、その変動過程で増減を繰り返し、現時刻の状態に至っている。そこで本研究では、実際の軌道により近い数値モデルにより通り変位の擬似測定データを作成し、それを対象に本推定法を適用し、得られたレール軸力に温度履歴などの軌道条件が及ぼす影響について調べた。

## 2 レール軸力推定法の概要<sup>2)</sup>

### 2.1 通り変位とレール軸力の理論関係式

レールは締結装置を介してまくらぎに接合されており、レールとまくらぎの両変位間には差異が存在する。また、左右レールの初期通り変位（軸力ゼロの状態における水平たわみ）は互いに異なるので、軸力作用下の弾性たわみも左右で一致しない。そのため、締結部からレールに作用する力も左右レールで異なる。したがって、道床横抵抗力の評価には、左右レール作用力の合力を考慮する必要がある。

左・右レールのつり合い式は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} EIw_L'''' + N(w_L'' + w_{L0}'') + k_r(w_L - w_s) &= 0, \\ EIw_R'''' + N(w_R'' + w_{R0}'') + k_r(w_R - w_s) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、レールは Euler ばりでモデル化しており、 $EI$  はレールの横たわみに関する曲げ剛性、 $N$  は軸力（圧縮を正）、

$w_L, w_R$  は左右レールの弾性横たわみ、 $w_{L0}, w_{R0}$  は初期通り変位、 $w_s$  はまくらぎ変位、 $k_r$  は締結部を連続分布バネでモデル化した際の単位長さ当りの横剛性である。また、 $(\cdot)'$  は軌道長手方向座標  $x$  に関する微分である。

まくらぎには、左右レールと道床から力が作用する。これらのつり合い式を  $w_s$  について解くと次式を得る。

$$w_s = \frac{k_r}{2k_r + k_s}(w_R + w_L) \quad (2)$$

ここで、道床横抵抗力は線形分布バネで表現しており、 $k_s$  は単位長さ当りの道床横剛性である。

式 (2) を式 (1) に代入して  $w_s$  を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} EIw_{LR}'''' + N(w_{LR}'' + w_{LR0}'') + \tilde{k}_T w_{LR} &= 0, \\ w_{LR} &:= w_L + w_R, \quad w_{LR0} := w_{L0} + w_{R0}, \\ \tilde{k}_T &:= k_r - \frac{2k_r^2}{2k_r + k_s} \end{aligned} \quad (3)$$

一方、軸力が  $N + \Delta N$  であるときのつり合い式は、軸力増分に伴うたわみ増分  $\Delta w$  を用い次式で与えられる。

$$\begin{aligned} EI(w_{LR}'''' + \Delta w_{LR}'''' + (N + \Delta N)(w_{LR}'' + \Delta w_{LR}'' + w_{LR0}'' + \Delta w_{LR0}'')) + \tilde{k}_T(w_{LR} + \Delta w_{LR}) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) から式 (3) 第 1 式を引くと次式を得る。

$$\begin{aligned} EI\Delta w_{LR}'''' + (N + \Delta N)\Delta w_{LR}'' + \Delta N(w_{LR}'' + w_{LR0}'') + \tilde{k}_T\Delta w_{LR} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) の  $x$  に関する Fourier 変換より、多少の計算の後に次式を得る。

$$k^2 \frac{\hat{w}_{LR} + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} \{ EI k^4 - (N + \Delta N) k^2 + \tilde{k}_T \} \quad (6)$$

ここで  $k$  は波数、 $(\hat{\cdot})$  はレール長手方向に関する Fourier 変換である。

2つの通り変位測定データ  $w_{LR}$  と  $w_{LR} + \Delta w_{LR}$  とから式 (6) 左辺を求めることができる。一方、右辺は波数  $k$  の 4 次関数で与えられており、4 次、2 次、0 次の係数をそれぞれ  $a, b, c$  とおくと、軸力  $N + \Delta N$  は次式により求めることができる。

$$N + \Delta N = EI \frac{b}{a} \quad (7)$$

また、式 (6) は次のようにも変形できる.

$$k^2 \frac{(\hat{w}_{LR} + \Delta \hat{w}_{LR}) + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} \{EI k^4 - N k^2 + \tilde{k}_T\} \quad (8)$$

式 (8) 右辺における 2 次項の係数を  $b'$  とおくと、軸力  $N$  は次式により与えられる.

$$N = EI \frac{b'}{a} \quad (9)$$

式 (7), (9) より  $\Delta N$  が得られれば、等価道床横剛性  $\tilde{k}_T$  を次式により求めることができる.

$$\tilde{k}_T = \Delta N c \quad (10)$$

## 2.2 粒子フィルタによる推定法

通り変位測定データにはノイズが含まれているため、2.1 に示した関係式から直接推定することは難しい. そのため文献 3) では、ベイズ推定手法の一つである粒子フィルタ<sup>3)</sup>を採用した. 以下にその概要を述べる.

ある時刻における通り変位を  $w_{LR1}$ , その際に作用している軸力を  $N_1$  とする. また、別時刻における通り変位を  $w_{LR2}$ , その時の軸力を  $N_2$  とする. 両時刻の測定データを同等に活用する目的で、式 (6), (8) の平均より得られる次式に基づき推定を行う.

$$k^2 \frac{(\hat{w}_{LR1} + \hat{w}_{LR0}) + (\hat{w}_{LR2} + \hat{w}_{LR0})}{2\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} [EI k^4 - 0.5(N_1 + N_2)k^2 + \tilde{k}_T] \quad (11)$$

本軸力推定問題を次式により設定する.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \mathbf{X}_{t-1}, \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{G}_t(\mathbf{X}_t) + \boldsymbol{\epsilon}_t \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{X}_t$  は推定すべき未知量を成分とするベクトルであり、 $\mathbf{X}_t = \{N_1, N_2, k_T\}$  で与えられる.  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  は通り変位測定データにおけるノイズによる当該 Fourier スペクトル比への影響項である.  $\mathbf{y}_t$  は通り変位の測定データの Fourier 変換の比 (スペクトル比) を離散波数毎に求めたものを成分とするベクトルであり、関数  $\mathbf{G}_t(\mathbf{X}_t)$  は式 (11) の右辺で与えられる.

まず推定値の候補となり得る様々な  $\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{X}_t$  を生成する. 粒子フィルタでは、これらを粒子と呼ぶ. 次に、各粒子毎に式 (11) の右辺を求め、それと測定データより得られた同式左辺との差異から尤度を評価する. 続いて、これに比例するように各粒子個数を再配分する. この操作を繰り返して求めた粒子個数分布により事後確率分布を近似し、それに基づき未知量の期待値を評価する.

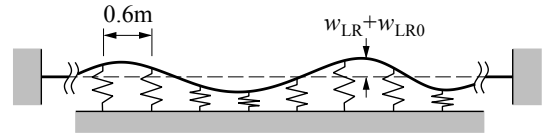


図-1 離散支持軌道のモデル化

## 3 実軌道を模擬した数値モデル

実軌道を模擬した数値モデルにより、擬似測定データを作成する. その際に用いた軌道モデルについて述べる.

### 3.1 軌道のモデル化

ロングレール軌道を有限長モデルで近似する (図 1). 軌道中央区間において、左右打ち切り端からの影響が十分小さくなるように、軌道長は 120m に設定した. 理論モデルにおいてレールの横たわみは Euler ばり近似を用いているが、この場合せん断たわみが無視されることとなる. その影響を確認するため、数値モデルではレールを要素長 0.3m の Timoshenko ばり要素により離散化し、その両端を固定点で与えた. 式 (3) の様に、軌道通り変位は左右レールのそれを合算したものについてのつり合い式で記述できるので、ここでは左右レールの通り変位和  $w_{LR}$  を変数として、離散化を行う.

軌道の初期通り変位は、以下の距離相関を有し、期待値ゼロ、標準偏差  $\sigma = 1\text{cm}$  の Gauss 分布により設定する.

$$R(x) = \sigma^2 e^{-(x/d)^2} \quad (13)$$

ここで、 $d$  は相関長である. なお、左右レールの初期通り変位和の標準偏差は  $\sqrt{2}\sigma$  で与えられる.

レールはまくらぎで離散支持されているものとし、その間隔を 0.6m とした. 一般にレール・まくらぎ間の締結剛性は道床横剛性に比べ高いため、締結部は剛結されているものとした.

疑似測定データの全通り変位に  $\sigma_\epsilon = 0.5\text{mm}$  のガウスノイズを与え、粒子フィルタを適用し軸力推定を行った.

### 3.2 道床横抵抗力のモデル化

各まくらぎ位置に作用する道床横抵抗力  $f_T$  の骨格曲線は次式<sup>4)</sup>により与えた.

$$f_T = f_0 \frac{w_s}{a + |w_s|} \quad (14)$$

ここで、 $f_0$  はまくらぎ 1 本当たりの最終道床横抵抗力、 $a$  は  $f_T = f_0/2$  となる時のまくらぎ変位である.

日夜の温度増減により、レール通り変位は脈動するため、それに伴う道床横抵抗力の変動履歴を再現する必要がある. そこで、道床横抵抗力の載・除荷過程を図-2 に示す様な履

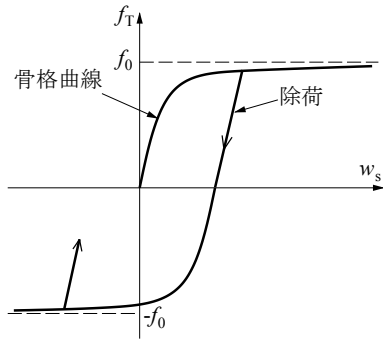


図-2 道床横抵抗力のモデル化

歴曲線により与えた。除荷時は初期剛性  $f_0/a$  の下  $f_T = 0$  まで線形的に作用力を低下させ、その後は式 (14) と同様の曲線に沿って逆方向に抵抗力を作用させるものとした。

また、実際の軌道の道床横剛性にはばらつきが存在する。そこで、軌道モデルの道床横剛性に空間変動を与える場合は、最終道床横抵抗力  $f_0$  を次式に示す一定振幅・一定波長の sin 波形により設定した。

$$f_0(x) = \bar{f}_0(1 + \delta \sin \frac{2\pi}{\lambda}x) \quad (15)$$

ここで、 $\bar{f}_0$  は解析における最終道床横抵抗力の平均値、 $\delta$  は変動振幅、 $\lambda$  は波長である。

#### 4 レールの温度履歴が推定結果に及ぼす影響

昼夜のレール温度変化に伴う軸力の変動履歴を考慮した解析により通り変位の擬似測定データを作成して、未知量推定を行った。

具体的には、気温と日射による輻射熱とを考慮した以下に示すレール温度解析を行い、得られたレール温度から次式によりレール軸力を設定した。

$$N = EA\alpha\Delta T \quad (16)$$

ここで  $EA$  はレールの伸び剛性、 $\alpha$  は線膨張係数、 $\Delta T$  はレール設定時からの相対温度である。式 (16) より各時刻におけるレール軸力を得たら、軌道通り変位解析を実施して、擬似測定データを作成する。

##### 4.1 レール温度解析の概要<sup>5)</sup>

水平な地面に敷設された、長さ  $l$  の直線レールを考える。レール内温度は断面内一様と仮定し、レール長手方向  $x$  についてのみ変化し得るものとする。この場合、温度解析に際してレールは一次元モデルで表現できる。レールの微小区間  $dx$  における、微小時間  $dt$  当りの熱エネルギー増分  $dE$  を次式により評価する。

$$dE = -dE_H + dE_S - dE_T - dE_R \quad (17)$$

ここで、 $dE_H$  はレール内を移動して微小区間  $dx$  より出て行く熱エネルギー、 $dE_S$  は太陽輻射エネルギー、 $dE_T$  は周囲の空気に伝達される熱エネルギー、 $dE_R$  は周囲に放射される熱エネルギーである。

式 (17) に各項の具体式を代入して次の熱伝導方程式を得る。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g \quad (18)$$

$$g = \frac{1}{C\rho A} \{ \gamma Q_S - [h(T - T_a) + \epsilon(T^4 - T_a^4)] S_R \}$$

ここで、 $T$  はレール温度 (K)、 $C$  は比熱、 $\rho A$  はレールの単位長さ当り質量、 $Q_S$  は単位長さ当りのレールが単位時間に受ける太陽輻射エネルギーであり、 $\gamma$  はその吸収率、 $h$  は空気の熱伝導率、 $T_a$  は気温、 $S_R$  はレールの断面周長、 $\epsilon$  はレールと周囲環境との間での輻射の授受に関する関数、 $\kappa = \kappa_0/C\rho$  は熱伝導係数、 $\kappa_0$  は熱伝導度である。また、熱伝導度  $\kappa_0$  は  $x$  について一定とした。なお、詳細については文献 6) を参照されたい。

簡単のため、伝導熱と放射熱の授受のみなされるものとする。このとき、レール両端における境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{1}{\kappa_0} \{ h(T - T_a) + \epsilon(T^4 - T_a^4) \}, \quad (x = 0, l) \quad (19)$$

ここで、 $\partial/\partial n$  はレール端における外向き方向微分であり、具体的には次式により記述される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} &= -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (x = 0) \\ &= \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (x = l) \end{aligned} \quad (20)$$

##### 4.2 レール温度履歴の解析条件

夏季におけるレール圧縮軸力の推定を対象とする。レール圧縮軸力が大きくなる日中での推定を想定し、2回の測定時刻の内、2回目の時刻をレール温度が高くなる13時に設定した。その下で、1回目の測定時刻を、表-1に示す様に同日8時、9時および10時の3ケースとして、2回の測定間における軸力等の差が推定結果に及ぼす影響について調べた。表-1において、 $t_1, t_2$  はそれぞれ1回目と2回目の通り変位測定時刻である。なお、レールの設定日時は8月1日午前1時とした。

レール温度解析に当たり、レールは東西方向に敷設されており、日の出から日没までの間は常にレールに日光が当たるものとする。気温は新潟市における気象観測データより設定した。4.1の各式におけるパラメータは、文献6)と同じに与えた。なお、レール温度解析における時間増分は1時間とし、レールの線膨張係数  $\alpha$  は  $12 \times 10^{-6} (1/K)$  とした。

表-1 軸力推定時刻

条件	$t_1$	$t_2$
Case A	8月15日8時	8月15日13時
Case B	8月15日9時	8月15日13時
Case C	8月15日10時	8月15日13時

表-4 軸力推定結果 (Case C)

	$N_1$	$N_2$
日時	8月15日10時	8月15日13時
正解軸力 (N)	302722	378073
推定軸力 (N)	162316	358886
推定誤差 (N)	-140406	-19187

### 4.3 解析結果

表-1の3ケースにおける軸力推定結果を、それぞれ表-2, 3, 4に示す。なお、5回の軸力推定の平均を最終推定値として表中に示している。

表-2 軸力推定結果 (Case A)

	$N_1$	$N_2$
日時	8月15日8時	8月15日13時
正解軸力 (N)	155865	378073
推定軸力 (N)	107916	425992
推定誤差 (N)	-47949	47919

表-3 軸力推定結果 (Case B)

	$N_1$	$N_2$
日時	8月15日9時	8月15日13時
正解軸力 (N)	231843	378073
推定軸力 (N)	170048	372090
推定誤差 (N)	-61795	-5983

2つの軸力の内、相対的に低い値を有する $N_1$ については、Case Cにおいて3ケース中最も大きな推定誤差(-140kN)を生じており、それが相対軸力 $\Delta N = N_2 - N_1$ の減少と共に増大する傾向が窺える。

一方、2回目の測定時における軸力 $N_2$ については、Case Aで推定誤差が最大値(48kN)となっており、相対軸力の増加が必ずしも推定精度の向上につながらないことがわかる。ただし、理由は明らかでないが、何れのケースにおいても $N_2$ の推定誤差は $N_1$ のそれに比べて小さく、概ね良好な推定結果を与えている。

なお、通り変位の変動が概ね定常状態に達する8月15日前後の他の日を対象に軸力推定を試みたところ、同様の傾向を示す結果が得られた。また、既往の研究<sup>2)</sup>の単調軸力増加解析では絶対軸力の推定が困難であったが、より現実に近い変動履歴下では、軌道の張り出しの危険性が増す正午過ぎにおけるレール軸力の絶対値が、比較的良好的な精度で推定可能であることが確認できた。

## 5 おわりに

本研究では実軌道に近い数値モデルを用いて昼夜のレール温度変化に伴う軸力の変動履歴を再現した解析を実施し、得られた通り変位擬似測定データを対象に、軸力推定を行い、現実の軌道により即した条件下における本推定法の適用可能性について検討した。なお、2回の通り変位測定の内、2回目をレール軸力が一日の中でほぼ最大となる13時に設定し、1回目の測定時刻(軸力)が推定精度に及ぼす影響について調べた。その結果、1回目の測定時刻によらず、張り出しの危険性が増す2回目の測定時におけるレール軸力が、比較的良好的な精度で推定可能であることが分かった。ただし、実測データに基づく推定の際には、ここで考慮した事項以外の影響も考えられ、さらなる検討が必要である。謝辞 本研究は科研費(17K06529)の助成を受けたものである。ここに記して謝意を表す。

### 参考文献

- 1) 坪川洋友, 矢沢栄治, 小木曾清高, 南木聡明: 車体装架型慣性正矢軌道検測装置の開発, 鉄道総研報告, 26(2), 7-12, 2012.
- 2) 阿部和久, 千葉颯兵, 佐藤拓郎, 小松佳弘, 紅露一寛: 通り変位測定データを用いた軌道力学状態推定に関する基礎的検討, 鉄道工学シンポジウム論文集, 22, 107-114, 2018.
- 3) 樋口知之, 上野玄太, 中野慎也, 中村和幸, 吉田亮: データ同化入門, 朝倉書店, 2010.
- 4) 宮井 徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術研究報告, No.1271, 1984.
- 5) 阿部和久, 桑山卓也, 元好茂: 空間的・時間的な温度変化を受けるロングレールの軸力分布解析, 鉄道力学シンポジウム論文集, 16, 101-108, 2012.