トンネル切羽前方における三次元比抵抗推定法の改善

新潟大学大学院自然科学研究科　学生員　竹内 新
新潟大学工学部　正会員　阿部 和久
福田組（株）　正会員　椎谷 成孝
新潟大学工学部　正会員　紅露 一寛

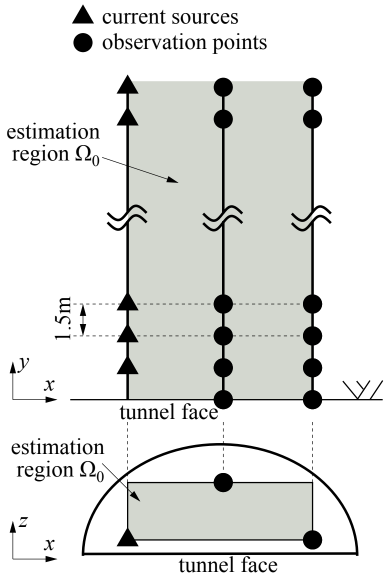
1　はじめに

トンネル掘削の際に，切羽前方域の地山構造を事前に把握することは，施工の安全性や経済性確保などの面で重要である．そのため，トンネル切羽面前方に設けたボーリング孔から試料を採取して，強度試験を行って力学特性を評価する，ボーリング調査法[1]が広く用いられている．当該法では試料を直に採取するため，その力学性状を的確に知ることができる．しかし，ボーリング資料より得られる情報は一次元的なものに限定されることに加え，ボーリング工事は費用と時間を要するため，削孔数には限界がある．したがって，トンネル切羽前方の地山構造を 3 次元的に把握するためには，ボーリング調査法を補間する新たな手法の導入が必要となる．

そこで著者ら[2]は，上述の調査法に加え，電気探査法[3]の一つである比抵抗トモグラフィ探査法を併用した手法の開発を行っている．当該法では，トンネル切羽面の 3 箇所で水平ボーリングを実施し，その内 1 本を電流入力に，他の 2 本を電位測定に用い，その結果より地山の電気比抵抗値の 3 次元的推定を行う．なお，文献 (2) では，比抵抗分布の推定の際に拡張 Kalman フィルタ[4]を用いた．当該推定法は，地山剛性等の推定[5]への適用例も報告されているが，本来線形逆問題を対象とした Kalman フィルタを非線形問題に拡張したものであり，未知量の修正過程は必ずしも非線形問題に適した効率的なものとはなっていない．そのため，文献 (2) に示した解析例では，未知量の収束が緩慢で，問題によっては不安定なものとなっていた．

本論文では，当該法における上述の問題点の改善を目的として，Bayes の定理[6]に基づいた推定法を構成する．具体的には，観測データに基づく未知量の事後確率分布の指数部より目的関数を設定し，未知量推定を目的関数の最小化問題として定式化する．その下で，最小解の探索に勾配法に基づいた非線形推定法を適用することにより，計算負荷が比較的軽微で，さらに安定且つ速やかな収束性を確保し得る手法を構築する．

以下では，まず本探査法の概略とそれに対応する数理モデルについて述べる．次に，未知量である電気伝導率の推定法に関する定式化を示す．最後に，幾つかの解析例を通して本推定法や，それに基づく探査法の妥当性について検討する．



図–1　ボーリング孔内の電極配置の概要

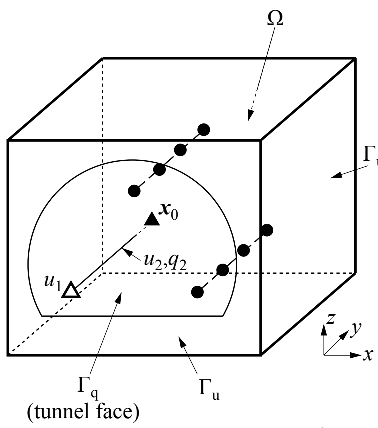
2　トンネル切羽前方探査解析

2.1　電気探査法の概要[8]

トンネル切羽前方域に，図-1 に示す様に 3 本のボーリング孔を設ける．なお，図-1 において，部分領域 Ω_0 は未知量である電気伝導率の推定領域である．

電位測定を以下の手順により実施する．

1) 電位測定に用いる切羽面中央上部および右下部ボーリン



図–2　解析対象の数理モデル

グ孔を削孔する．

2) 上記 2 つのボーリング孔内に固定電極を等間隔 (1.5m) に設置する．

3) 左下部に電流入力用のボーリング孔を 1 ロッド分 (1.5m) 打撃削孔する．

4) 移動電極を左下部ボーリング孔に挿入し，先端地山に接地させて電流を入力する．

5) 中央上部および右下部ボーリング孔内の各固定電極における電位を測定する．

6) 移動電極を回収する．

7) 3)〜6) を繰り返す．

2.2 電気探査法の順解析過程

2.1. に述べた電気探査を対象とした有限要素順解析過程において，トンネル切羽前方の三次元場を図-2 に示す有限領域 Ω で表現する．Ω 内の電位場は次の支配方程式で与えられる．

$$\mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}\ u) = -Q\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

ここで，u は電位，k は電気伝導率，$\mathbf{x}_0$ は電流入力点，Q は入力電流，δ はデルタ関数である．

本研究における境界条件は，次式により与えられる．

$$\begin{aligned} q :=& \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \Gamma_q \\ u =& \frac{\rho Q}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}, \quad \text{on } \Gamma_u \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，Γ_q はトンネル切羽面に対応する部分境界であり，当該境界面内に位置している有限要素節点においては法線 n 方向流束 q をゼロに規定する．Γ_u はそれ以外の境界であり，そこに属する節点では電位を規定する．なお，Ω 内の電位場が無限領域のそれを近似し得る様に，Γ_u 上の節点では $\mathbf{x}_0$ に電流 Q を入力した場合の電位を式 (2) 第 2 式により設定する [2)]．式 (2) の ρ は，領域全体を一様場と見なした際の見かけの比抵抗値である．また，電流入力用ボーリング孔は，入力点 $\mathbf{x}_0$ 手前まで中空の金属ロッドで保護されているため，そこに位置する節点電位 u_2 は，切羽面上のロッド端電位 u_1 と等しい値をとる様に拘束する．

式 (1)，(2)，および上述の設定条件に対応する有限要素方程式を次式で与える．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{b1} & \mathbf{K}_{b2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{1a} & \mathbf{K}_{1b} & K_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{2a} & \mathbf{K}_{2b} & \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \\ u_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_a \\ \bar{\mathbf{q}}_b \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

ここで，$\mathbf{u}_a = \bar{\mathbf{u}}_a$ は Γ_u 上の規定節点電位，$\mathbf{u}_b$ は $\mathbf{u}_a, u_1, \mathbf{u}_2$ 以外の節点における電位，$\mathbf{q}_2$ はロッド上の節点流束，$\bar{\mathbf{q}}_b$ は $\mathbf{u}_b$ に対応する流束であり，$\mathbf{x}_0$ で Q，それ以外の節点ではゼロとなる．また，$\mathbf{I}$ は単位行列，$\mathbf{1} = \{1\ 1\ \cdots 1\}^T$ である．

3 電気伝導率の推定法

3.1 目的関数の設定

上述の電気探査において，電流入力用ボーリングロッドの掘進過程を N ステップ実施する場合について考える．第 α ステップ目における電流入力・電位測定の求解方程式 (式 (3)) を次式で表すものとする．

$$[\mathbf{A}^\alpha]\{\mathbf{v}^\alpha\} = \{\mathbf{b}^\alpha\}, \quad (\alpha = 1, \cdots, N) \tag{4}$$

ここで，$[\mathbf{A}^\alpha]$, $\{\mathbf{v}^\alpha\}$, $\{\mathbf{b}^\alpha\}$ は，それぞれ第 α ステップ目の式 (3) における求解行列，未知ベクトル，および右辺ベクトルである．

測定ノイズ $\{\boldsymbol{\epsilon}^\alpha\}$ の各成分を，互いに独立な期待値ゼロ，標準偏差 σ_ε の Gauss ノイズと仮定すると，$\{\mathbf{h}^\alpha\}$ が与えられた場合の $\{\mathbf{Y}^\alpha\}$ の事後確率分布の指数部 $J_{1\alpha}$ は次式で与えられる．

$$J_{1\alpha} = -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}||\mathbf{Y}^\alpha - \mathbf{h}^\alpha||^2 \tag{5}$$

部分領域 Ω_0 における電気伝導率を，有限要素毎に，もしくは幾つかの要素集合毎に設定するものとし，これら未知量を成分として与えられるベクトルを $\{\mathbf{X}\}$ で表す．当該未知量の事前情報が，期待値 $\{\tilde{\mathbf{X}}\}$ および精度行列 (共分散逆行列)$[\boldsymbol{\Phi}]$ の正規分布で与えられているものとする．すると，$\{\mathbf{X}\}$ の事前確率分布の指数部 J_2 は次式で与えられる．

$$J_2 = -\frac{1}{2}[\mathbf{X}-\tilde{\mathbf{X}}]^T[\boldsymbol{\Phi}]\{\mathbf{X}-\tilde{\mathbf{X}}\} \tag{6}$$

(5)，(6) にベイズの定理 [6)] を用いることにより，未知量の推定問題を次式の目的関数 J の最小化問題として設定する．

$$J = -\sum_{\alpha=1}^{N} J_{1\alpha} - J_2 + \sum_{\alpha=1}^{N}[\boldsymbol{\lambda}^\alpha]^T\{\mathbf{A}^\alpha\mathbf{v}^\alpha - \mathbf{b}^\alpha\} \tag{7}$$

ここで，$\{\boldsymbol{\lambda}^\alpha\}$ は未定乗数ベクトルである．

3.2 未知量推定法

本研究では，J の最小解探索に勾配法を適用する．

式 (4) を考慮すると，式 (7) より $\partial J/\partial X_i$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial X_i} =& \Phi_{ij}(X_j - \tilde{X}_j) - \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_\alpha (Y_k^\alpha - h_k^\alpha)B_{kl}\frac{\partial v_l^\alpha}{\partial X_i} \\ &+ \sum_\alpha \lambda_k^\alpha \left(\frac{\partial A_{kl}^\alpha}{\partial X_i}v_l^\alpha + A_{kl}^\alpha\frac{\partial v_l^\alpha}{\partial X_i}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，行列・ベクトル成分における繰り返し指標は総和規約に従うものとする．なお，$\partial h_k^\alpha / \partial X_i = B_{kl} \partial v_l^\alpha / \partial X_i$ の関係を用いた．

$\{\boldsymbol{\lambda}^\alpha\}$ に次の随伴方程式を課すものとする．

$$[\mathbf{A}^\alpha]^T \{\boldsymbol{\lambda}^\alpha\} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} [\mathbf{B}]^T \{\mathbf{Y}^\alpha - \mathbf{h}^\alpha\} \tag{9}$$

すると，式 (8) の $\partial J / \partial X_i$ は次式で与えられる．

$$\frac{\partial J}{\partial X_i} = \Phi_{ij}(X_j - \tilde{X}_j) + \sum_\alpha \lambda_k^\alpha \frac{\partial A_{kl}^\alpha}{\partial X_i} v_l^\alpha \tag{10}$$

これにより，感度 $\partial v_i^\alpha / \partial X_j$ を求める必要が無くなり，そのための連立方程式の求解計算が不要となる．

式 (10) で求めた勾配成分より，未知量の修正成分 ΔX_i を次式に基づき与える．

$$\Delta X_i = -\beta \frac{\partial J}{\partial X_i} \tag{11}$$

ここで β の値は，$|\Delta X_i / X_i|$ が所定の上限値以下となる様に設定する．また，未知量 X_i は電気伝導率であるので，物理的に正値をとらねばならない．修正過程において当該要件を保証するため，X_i を $\tilde{X}_i e^{\gamma_i}$ と指数表現により与える．すると，ΔX_i は次式で近似できる．

$$\Delta X_i \approx X_i \Delta \gamma_i \tag{12}$$

ここで，$\Delta \gamma_i$ は γ_i の修正量である．

式 (11), (12) より次の修正式を得る．

$$X_i + \Delta X_i = X_i \cdot e^{\Delta \gamma_i}, \quad \Delta \gamma_i = -\frac{\beta}{X_i} \frac{\partial J}{\partial X_i} \tag{13}$$

4　解析例に基づく検討

4.1　解析条件

解析対象領域を図-3 に示す．外部領域と推定領域 Ω_0 のほとんどの部分における電気伝導率の正解値を 1.0 (1/Ωm) とし，Ω_0 の一部分に電気伝導率値が 2.0 (1/Ωm) で与えられる部分領域 (介在物) を設定した．なお，介在物領域については，電流入力点および測定ボーリング孔と当該領域との位置関係がそれぞれ異なる，以下の 4 ケースを検討対象とした．

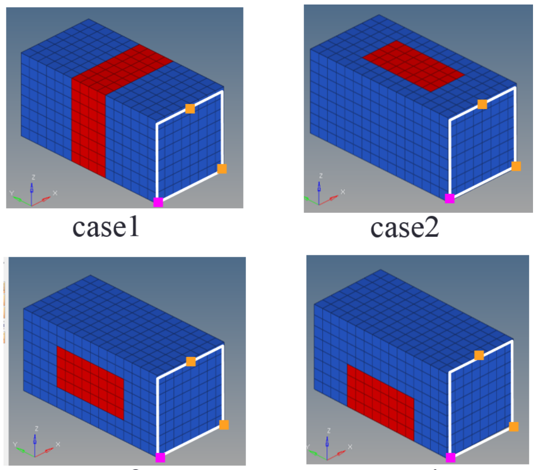
case1 : $\{x$:4-12, y:6-10, z:4-12$\}$ (m)

case2 : $\{x$:6-10, y:4-12, z:4-12$\}$ (m)

case3 : $\{x$:4-12, y:4-12, z:6-10$\}$ (m)

case4 : $\{x$:4-12, y:4-12, z:4-8$\}$ (m)

各ケースの Ω_0 内における介在物位置を図-3 に示す．なお，赤い領域が介在物であり，右端面が切羽面となる．切羽面には電流入力ロッド位置と観測ボーリング位置を，それぞれピンク色と黄色の点で表示した．



図–3　各ケースにおける介在物配置

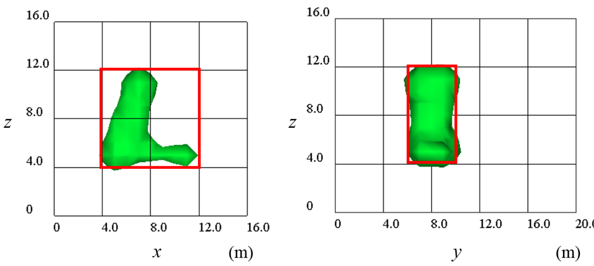
4.2　電気伝導率の推定結果

各ケースにおける電気伝導率の推定結果を図-4〜図-7 に示す．なお，case3 以外は電気伝導率が 1.5($1/\Omega m$) 以上の領域を示している．一方，case3 では全体に推定値が低目となったため，当該ケースのみ 1.3($1/\Omega m$) 以上の領域を図示した．図中の赤枠は，正解における介在物の分布域境界である．また，いずれのケースでも 10 回程度の反復計算で収束解を得た．

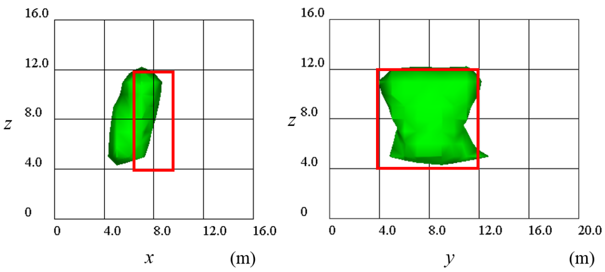
case1(図-4) における (x, z) 面内の分布では，2 つの測定用ボーリング孔位置と，電流入力点とをつなぐ直線に沿って電気伝導率の高い領域が推定されている．(x, z) 面内にはこれら 3 点のみが設定されているが，y 軸方向には 1m 間隔で密に測定点が置かれており，電流入力点と各測定ボーリング内の測定点とで与えられる平面内の詳細な情報を得ることができる．そのため，これら 2 つの平面内での電気探査を統合した様な推定結果が得られたものと考えられる．一方，y 軸方向については，上述のように測定点が密に設定されているため，介在物の分布範囲が適切に推定できている．

case2(図-5) では，(x, z) 面内において，電流入力点と 2 つの観測点とをつなぐ直線上に介在物が分布していない．そのため，当該面内における推定値は，左下部の電流入力点と中央上部の測定点とをつなぐ直線に沿うように分布する結果となっている．ただし，y 軸方向に関しては，case1 と同様に，介在物の分布範囲が概ね適切に推定されている．

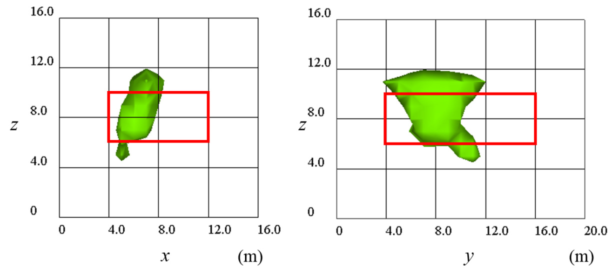
case3(図-6) の結果は，今回検討した 4 ケースの中で最も低い推定精度となった．当該ケースの場合，(x, z) 面内において，電流入力点と右下部測定点とをつなぐ直線上に介在物が存在していない．さらに，電流入力点と中央上部の



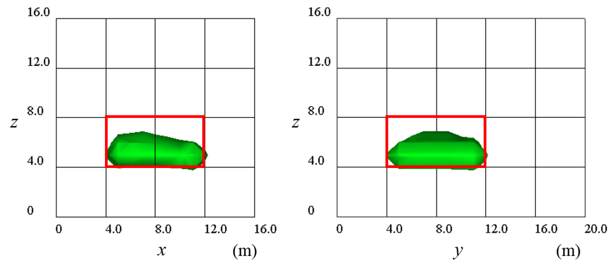
図–4　介在物領域の推定結果 (case1)



図–5　介在物領域の推定結果 (case2)



図–6　介在物領域の推定結果 (case3)



図–7　介在物領域の推定結果 (case4)

測定点との間にも，介在物の一部分が存在するだけとなっている．そのため，前述の 2 つの測定平面内の探査からでは，介在物位置を適切に推定し得なかったものと思われる．

case4(図-7) では，4 ケースの中で，最も良好な 3 次元推定結果を得ることができた．これは，電流入力点と右下部測定点とで構成される平面に沿って介在物が位置していたためと考えられる．

以上より，(x, z) 面内に関しては，電流入力点と測定点とをつなぐ直線に沿って特徴的な地盤構造 (比抵抗値) が分布する場合，適切な推定が可能であることが分かった．一方，ボーリング孔に沿った y 軸方向に関しては，測定点が密に配置されるため，地盤構造を概ね適切に推定できることを確認した．

なお，ここでは介在物の電気伝導率が周囲に比べ高い場合の結果を示したが，逆に低い場合においても同傾向の推定結果が得られた．

5　おわりに

トンネル切羽前方の三次元電気探査法において未知量となる電気比抵抗 (電気伝導率) に対する推定手法を構築した．未知量推定過程の安定化と計算の効率化を図るために，勾配法に基づく推定法を採用した．その際に，Bayes の定理に基づき，測定データ取得を前提とした事後確率分布より目的関数を構成した．なお，勾配法で用いる目的関数の感度は，随伴方程式の導入により効率的に求めた．

幾つかの解析例に本手法を適用した結果，何れのケースにおいても 10 回程度の修正計算で最小値に至っており，収束過程の安定性を確認することができた．また，一連の電流入力点と 2 本のボーリング孔に設けた測定点群とから，切羽前方域における電気伝導率の 3 次元的な推定を試みたが，電流入力点と測定ボーリング孔とで与えられる平面近傍の地質構造について，特に良好な推定結果が得られることがわかった．

参考文献

1) 保坂雅夫，小池　豊：地質調査ボーリング —その歴史と最近の技術の動向—，地盤工学会，**41**(1993), No.9, pp.13-18.
2) 佐々木　丈，阿部和久，椎谷成孝，今村大介，紅露一寛：比抵抗トモグラフィによるトンネル切羽前方の三次元地山構造推定，計算数理工学論文集，**17**(2017), pp.71-76.
3) (財) 物理探査学会編：物理探査適用のてびき，(財) 物理探査学会, (2008).
4) 樋口知之：データ同化入門，(2011), 朝倉書店.
5) Nguyen, L.T., Datcheva, M., Nestorovic, T.：Identification of a fault zone ahead of the tunnel excavation face using the extended Kalman filter, Mech. Research Comm., **53**(2013), pp.47-52.
6) 関原謙介：ベイズ信号処理，共立出版，(2015).
7) Bonnans, J.F., et al.：Numerical Optimization (2nd Ed.), Capt.4 and 5, (2006), Springer.
8) 椎谷成孝，佐々木　丈，阿部和久，木山隆二郎，今村大介：水平ボーリングによるトンネル切羽前方の電気探査方法の開発について，第 33 回土木学会関東支部新潟会研究調査発表会,（2015）,pp.224-227.