# 開水路水理のビッグデータからのモデル方程式の抽出


| | | |
|---|---|---|
| 新潟大学工学部工学科 | 学生会員 | ○清水　啓太 |
| 新潟大学大学院自然科学研究科 | 学生会員 | 茂木　大知 |
| 新潟大学工学部工学科 | 非会員 | 村松　正吾 |
| 新潟大学理学部理学科 | 非会員 | 早坂　圭司 |
| 新潟大学災害・復興科学研究所 | 正会員 | 安田　浩保 |


## 1　はじめに

一般に河川などの開水路の流れのモデル式として，水深方向の一様の流れを仮定した浅水流方程式が用いられる．その嚆矢の一つは Callander[1] であるが，現象に対して浅水流方程式がどれほど妥当性であるかの言及はない．波動論的な観点から見ると，浅水流方程式は，拡散と分散などの高次項の効果を無視した双曲型偏微分方程式である．高次項の効果は，この方程式内においてその他の効果よりも一般に数オーダー小さい．しかし，これらの項が河川物理においてどれほど重要となるかは，波動現象の細密な実測が困難であるため実証されていない．ごく最近の研究により，河床や河道の不安定化は高波数の水面波の自励的な発生が要因となることが解明 [2)3)] されつつある．このような高波数の水面波は，モデル式で記述する場合には高次項の効果の考慮が不可欠となる．しかし，これは従来のモデルには記述されておらず，仮定の見直しが必要である．モデル式を求める手法として，現状の理論を介した演繹的手法では計測技術の進歩の都度，新しい仮定に基づくモデルの構築が必要である．

近年の計測技術の進歩により，開水路流れにおいても Moteki *et al.*[4] をはじめに，時間・空間的に高密度なデータが得られつつある．Rudy *et al.*[5] によると，データが十分にあれば，従来の物理的な仮定を挟む演繹的な手法ではなく，帰納的な手法によりモデル式を構築できる．彼らは，数値計算で生成した乱流の挙動に対し，空間位置で収集された時系列データから支配方程式の係数を帰納的に決定できることを示した．同手法を用いることで，現象を説明する上で量・質・種類のそれぞれが十分な観測データが得られたときに，開水路流れの物理を緻密に表現するモデル式を抽出できる可能性がある．ただし，現時点では Rudy *et al.*[5] の手法により良好な精度でモデル式を抽出するにあたり，時間と空間の各々をどれほど細密に測定したデータ量が必要となるかは不明である．本研究では，移流方程式の理論解の解析結果を入力値とし，そのデータ量の違いに対する Rudy *et al.*[5] の手法の応答を調べた．

## 2　観測ビッグデータからのモデル式の抽出法

Rudy *et al.*[5] の手法ではまず，観測された空間の時系列データ (データ取得回数 $M$ における空間測定点 $N$) の 2 次元配列 ($M \times N$) を入力値として，探索する最高偏導関数と最高乗数を指定し，式 (1) に示すように求める偏微分方程式の線形および非線形項と偏導関数の候補 $D$ 個の行列 $\Theta$ を構築する．このとき U は空間の時系列データの離散値，Q は複素数データの大きさなどの追加入力を表す．

$$\Theta(\mathrm{U}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{C}^{NM \times D} \tag{1}$$

次に，行列 $\Theta$ について式 (2) に示す時間微分 $\mathrm{U}_t$ をとり，$\Theta$ の列と同じように列ベクトルに整形する．

$$\mathrm{U}_t = \Theta(\mathrm{U}, \mathrm{Q})\xi \tag{2}$$

このとき偏微分方程式はスパースな係数ベクトル $\xi$ を持つ式で表現され，$\xi$ は偏微分方程式に含まれる項の情報を含んでいる．この $\xi$ をスパース回帰によって解くことで主要な項を同定でき，偏微分方程式を抽出できる．

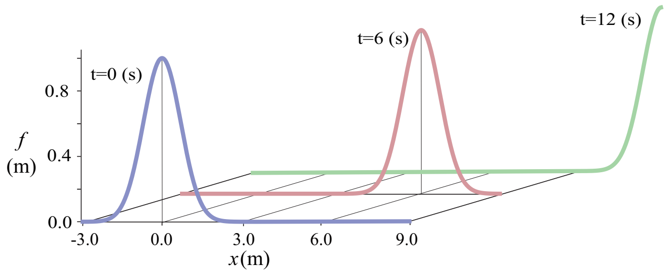
## 3　移流方程式の抽出

### 3.1　移流方程式とその理論解

解析の対象とする方程式は，式 (3) に示すような移流速度 1.0 m/s の移流方程式とする．この微分方程式は，ある物理量 $f$ について，$f_t$ は時間方向の一階微分を，$f_x$ は空間方向の一階微分を記述したもので，**図–1** の様に，初期波形を保ったまま速度 1.0 m/s で移流することを記述する．

$$f_t + 1.0 f_x = 0 \tag{3}$$

Rudy *et al.*[5] の手法によりモデル式を抽出するにあたっては，入力データの誤差やノイズに留意する必要があると指摘している．数値計算により入力データを生成した場合は，打ち切り誤差が不可避である．また，実測データは測定誤差と測定時のノイズが不可避である．本研究では，これらの影響を除外した上で Rudy *et al.*[5] の手法の適用性を検討するため，理論解により厳密解を得て，入力データとして用いる．




**図–1**　時空間に関する入力条件

本研究では初期条件を式 (4) で与え，時刻ごとの波形を式 (5) に示した理論解から算定した．

$$f_{(x,0)} = e^{-x^2} \tag{4}$$

$$f_{(x,t)} = e^{-(x-t)^2} \tag{5}$$

理論解の算定においては，空間分解能 $dx$ は 0.01 m, 時間分解能 $dt$ は 0.1 s とした．

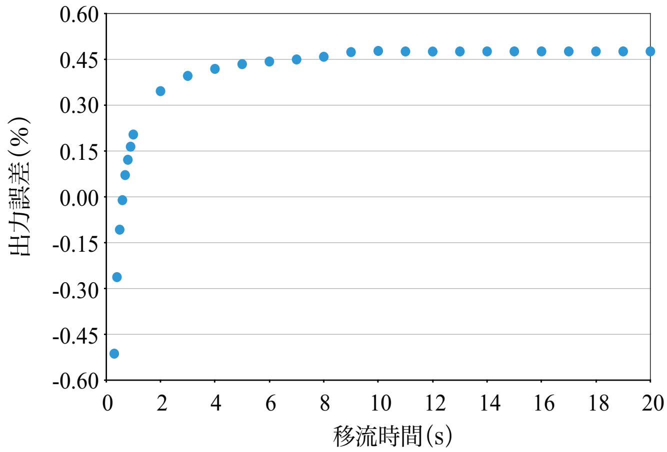
Rudy *et al.*[5] の手法に入力するデータの量は $N$ または，$M$ を変化させて調整すれば良い．本研究では解析する空間の範囲を，**図–1** に示す –3.0 m から 9.0 m の全長 12 m とした．このとき，$dx$ は前述の通り定数である為，$M$ は物理量 $f$ の移流時間 $t$ となる．$t$ の条件は，モデル式を抽出するために必要となる最小データ取得回数の 0.3 s から，初期に与えた波形の凸型の波形が空間範囲を通過後，しばらく時間が経過した 20.0 s までとし，間隔は 1.0 s までは 0.1 s ずつ，それ以降は 1.0 s ずつとした．

### 3.2　解析結果

**図–2** に，各入力条件毎の解析結果について入力値との誤差で示す．出力誤差は，出力された値と, 式 (3) に示す移流方程式の移流速度 1.0 m/s との誤差を表しており，0 % に近いほど解析の精度は高いとみなせる．全ての条件で抽出された項は移流項のみとなり，誤差は 1 %以下の出力結果が得られた．移流時間 $t$=0.3 s のとき，出力誤差は負の値であり，移流時間が長くなるにつれて精度は良くなった．しかし，$t$=0.6 s を境に誤差は正の値で大きくなり，$t$=14.0 s 以降，出力誤差は一定となった．

### 3.3　考察

今回の解析においては理論解を入力した．このため，数値計算に由来する打ち切り誤差が含まれず，入力データとしての誤差はない．そのため，移流時間が長いほど入力されるデータ量も多くなり，モデル式の推定精度が向上することを想定していた．しかし，実際には移流時間が短い $t$=0.6 s の出力値の精度が最も高くなり，時間範囲のデータ量に精度が比例しないことが分かった．




**図–2**　Rudy による移流方程式の解析結果

また，$t$=12.0 s 以降では，初期に与えた波形の凸型の波形は**図–1** に示すように，解析範囲内で視覚的に認識することはほとんどできない．よって，$M$ が増えても，入力される情報は微小であるため，出力結果はほぼ一定となったと考察される．

## 4　おわりに

本研究は，スパース回帰を用いたモデル方程式の抽出方法である Rudy *et al.*[5] の手法を用いてビッグデータから開水路流れの式を抽出する第一段階として，移流方程式の理論解を入力値した場合の抽出の特性について調べた．

今回のような初期に与えた一つの波形が維持されたまま移流する現象においては，十分に $M$ を確保することで，安定した解析が可能であることが示唆された．今後は，対象とする波形が変形する場合における時間範囲毎の特性を調べる他，空間範囲を変数とした解析も行い，必要となる入力データ量を明らかにする予定である．

### 参考文献

1) Callander R., Instability and river channels, *J. Fluids Mech.*, 36 3, 1969.
2) Moteki D. , Seki S., Muramatsu S., Hayasaka K, Yasuda H., On the Occurrence of Sandbars, *Phys. Fluids* 35, 0128760, 2023.
3) Seki S., Moteki D., Yasuda H., Novel Hypothesis on the occurrence of sandbars, *ESS Open Archive*, 2023.
4) Moteki D., Murai T., Hoshino T., Yasuda H., Muramatsu S., Hayasaka K., Capture method for digital twin of formation processes of sand bars, *Phys. Fluids* 34, 034117, 2022.
5) Samuel H. Rudy, Steven L. Brunton, Joshua L. Proctor, J. Nathan Kutz, Data–Driven discovery of partial differential equations, *Sci Adv.* 3., 2017.