

# 分布ばねで周期支持されたレールの分散解析

新潟大学大学院自然科学研究科  
新潟大学工学部  
新潟大学工学部

袴田 翔太  
正会員 阿部 和久  
正会員 紅露 一寛

## 1 はじめに

軌道系の動的挙動を把握することは、列車の走行安定性、乗り心地、騒音、地盤振動といった観点から重要である。既往の研究<sup>1)</sup>では、レールとまくらぎの間のパッド類を点支持のばねモデルにより表現し、分散解析を行った。しかし、実際の軌道において、軌道パッドやまくらぎ下パッドは20cm四方程度の広がりを持つ。この値は、まくらぎ間隔が約60cmであるのに対し、無視できない値である。そのため、これまで分散解析に広く用いられてきた点支持モデルに対し、分布ばね支持による軌道モデルの再現が有意な差異を有するものであるのかを検討することには意義があると考えられる。そこで本研究では、パッド類による支持条件を点支持から分布ばね支持に換え、より現実に即したモデルに変更して、その影響について検討する。

## 2 軌道のモデル化

直結系の無限長周期軌道を想定して、図-1のようなはりモデルを考える。はり幅は幅  $B$  にわたる連続ばねにより、間隔  $L$  で周期支持されているものとする。はりには Timoshenko ばりで与える。

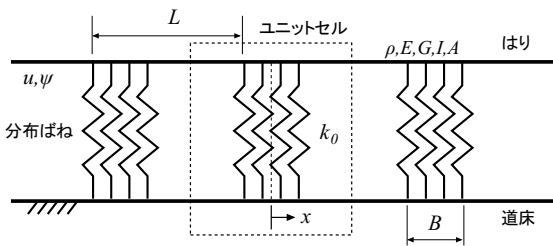


図-1 分布ばね支持のモデル

## 3 ユニットセルの運動方程式

図-1 に示したモデルにおける自由振動問題は、円振動数  $\omega$  の定常状態を対象とすると、次の運動方程式で与えられる。

$$\begin{aligned} GAK \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \rho A \omega^2 u + k_0 u \Delta_L(x) &= 0, \\ GAK \left( \psi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho I \omega^2 \psi + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $K$  はせん断係数、 $\Delta_L(x)$  は  $|x| < B/2$  で 1、 $B/2 < |x| < L/2$  で 0 となる周期関数である。このとき、円振動数  $\omega$  での周期構造の定常解に対し、次の Floquet 原理が成り立つ。

$$\begin{aligned} u(x+L) &= e^{-i\kappa L} u(x), \\ \psi(x+L) &= e^{-i\kappa L} \psi(x) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\kappa$  は Floquet 波数である。

## 4 波動モードの固有方程式

式 (2) の周期条件を満たすように  $u$ ,  $\psi$  を次式で展開する<sup>2)</sup>。

$$\begin{aligned} u(x, \omega, \kappa) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(\omega, \kappa) e^{-iz_n x}, \\ \psi(x, \omega, \kappa) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(\omega, \kappa) e^{-iz_n x}, \\ z_n &:= \frac{2n\pi}{L} x + \kappa \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $u_n$ ,  $\psi_n$  は展開係数である。

$\Delta_L(x)$  を次のように Fourier 級数展開する。

$$\begin{aligned} \Delta_L(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i \frac{2n\pi}{L} x} \\ a_n &:= \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi B}{L}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

式 (3), (4) を (1) に代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_{nm} u_m &= 0, \\ \mathbf{A}_{nm} &:= X_n \delta_{nm} + k_0 a_{n-m}, \\ X_n &:= \frac{(z_n GAK)^2}{\rho I \omega^2 - EI z_n^2 - GAK} + GAK z_n^2 - \rho A \omega^2 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\delta_{nm}$  は Kronecker のデルタである。

式 (5) より、分散曲線は次の式 (6) で与えられる  $\omega$  と  $\kappa$  に関する固有値問題より求めることができる。

$$|\mathbf{A}(\omega, \kappa)| = 0 \quad (6)$$

式 (6) に対しては非線形固有値問題の数値解法である Block S-S 法<sup>3)</sup>を用いる。

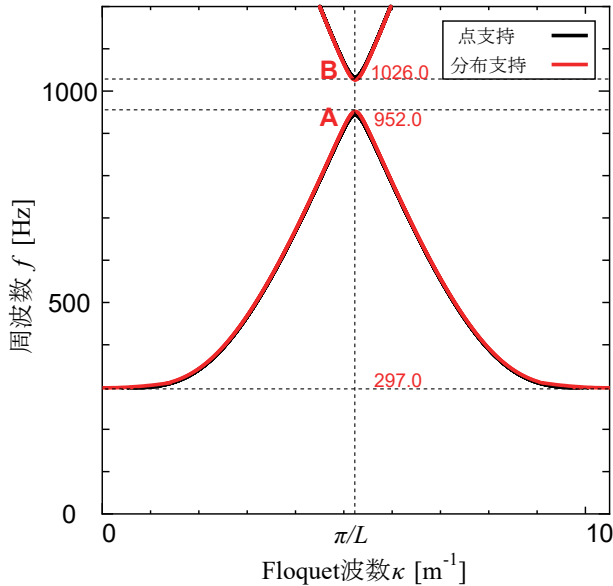


図-2 直結軌道における分散曲線の比較

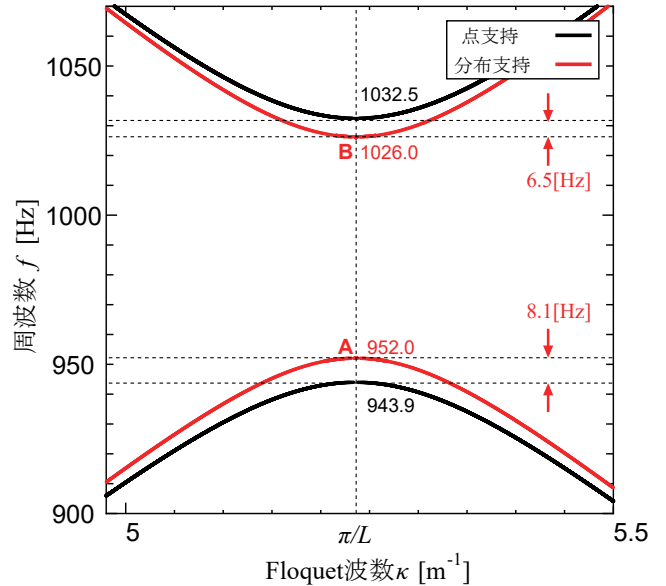


図-3 ストップバンド付近の比較

## 5 解析条件

本研究では 50kg N レールを対象に解析を行う。まくらぎ間隔  $L$  は 0.6m とし、パッドの幅  $B$  は 0.2m とした。また、パッドのばね定数を 110MN/m として分布ばね剛性  $k_0$  を設定する。式 (3), (4) の級数展開は、精度を確認の上、 $\pm 20$  項までで打ち切った。

## 6 分散解析の結果

式 (6) の固有値問題により求められた分散曲線と、点支持モデルを用いた分散曲線を併せて描いたものを図-2 に示す。顕著な差異が認められた周波数帯に絞ったものを、図-3 に示す。図中、黒色のプロット点が点支持モデルの分散曲線、赤色のものが分布支持モデルの分散曲線を表す。まず、本手法の妥当性を検討するために、パッド幅  $B$  の値をを徐々にゼロに近づけ、分散曲線の挙動を確認した。分布支持系の分散曲線が点支持モデルの分散曲線に漸近する様子が確認できたことから、本手法の妥当性が認められた。

図-2 において、約 300Hz 以下の周波数帯、及び A-B 間がストップバンドを与える。より詳細に調べるために、図-3 の様に拡大すると、ストップバンド下端の周波数に 8.1Hz の上昇、上端周波数に 6.5Hz の低下が確認できる。 $\kappa = \pi/L$  におけるバンド端 (A・B) でのレールのたわみモードを図-4 に示す。尚、図中の点線はレールの初期位置を示している。A 点はレール支持位置に節をもつ pinned-pinned モードに対応する。一方、B 点はレール支持位置に腹を、スパン中央に節

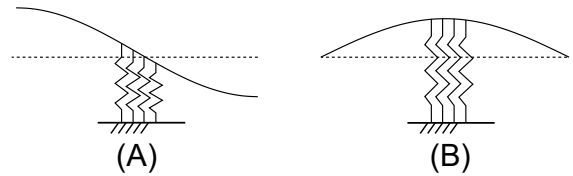


図-4 分布支持モデルのストップバンド端におけるレールのたわみモード

をもつ共振モードを与える。但し、いずれも支持間隔  $L$  を 1/2 波長とした定在波である。尚、モード形状にパッド幅を考慮した影響は見られなかった。

## 7 おわりに

本研究では、直結系軌道を対象にレール支持部のパッド類の幅を考慮した分散解析を行った。1000Hz 付近のストップバンドに縮小が認められたものの、たわみモードにはほとんど影響を及ぼさないことがわかった。今後は本条件にまくらぎの上下運動と回転運動を考慮した解析を行う。

## 参考文献

- 1) 阿部和久, 古谷卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集 Vol.10, pp.1029-1036, 2007.
- 2) 阿部和久, 山田高也, 古田勝, 末原美智子, 紅露一寛: 地下鉄トンネル・地盤連成系の三次元加振応答解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.74, No.2 (応用力学論文集 Vol.21), I523-I534, 2018.
- 3) Asakura, J., Sakurai, T., Tadano, H., Ikegami, T. and Kimura, K.: A numerical method for non-linear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Letters*, Vol.1, pp.52-55, 2009.