PC 展開を用いた軌道初期通り変位波形の生成

新潟大学大学院自然科学研究科　学生会員　永谷　航太
新潟大学工学部　正会員　阿部 和久
新潟大学工学部　正会員　紅露 一寛

1　はじめに

これまで当研究室では, ランダムな通り変位を有するロングレール軌道の座屈確率特性について検討してきた [1),2)]. その結果, 同一の定常ランダム性を持つ通り変位でも座屈温度が大きく異なることが分かった. 座屈温度が極端に低い通り変位に共通する特性を把握するためには, それらを効率的に生成・収集する必要がある. これまで, 上述の展開係数を多項式カオス展開 (PC 展開) で生成し, 扱う情報量の圧縮を試みたが, 不適切な確率分布が確認された. そこで本研究では, 最尤推定法を用いて適切な展開係数の生成を試みる.

2　ランダムな通り変位波形作成方法

通り変位波形を以下の距離相関関数 $R(x)$ に従う定常ランダムデータで生成する.

$$R(x) = \frac{\sigma^2}{1+(x/d)^2} \tag{1}$$

ここで x は軌道長手方向距離, σ は初期通り変位の標準偏差, d は相関長である. 座屈解析では, 軌道をはり要素に分割し, 左端点から順に座標 x_i を設定する. 1 要素あたりの長さを Δx とすると, i 番節点位置は $x_i = i\Delta x$ となる. x_i における初期通り変位を w_{0i} とする. w_{0i} を成分に持つベクトルを $\{\mathbf{W_0}\}$ とし当該ベクトルにおける分散共分散行列 $[\mathbf{C}]$ は次の期待値で与えられる.

$$[\mathbf{C}] = E(\mathbf{W_0}\cdot\mathbf{W_0^T}) \tag{2}$$

ここで, $[\mathbf{C}]$ の固有値問題を以下の様に設定する.

$$[\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\phi_i}\} = \lambda_i\{\boldsymbol{\phi_i}\} \tag{3}$$

$\{\mathbf{W_0}\}$ は, 式 (4) より求められた固有値 λ_i , 固有ベクトル $\boldsymbol{\phi_i}$ から, 次式で生成される.

$$\{\mathbf{W_0}\} = [\boldsymbol{\Phi}][\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}]\{\boldsymbol{\eta}\} \tag{4}$$

ここで, $[\boldsymbol{\Phi}]$ は $\boldsymbol{\phi_i}$ を縦ベクトルとして並べて得られる行列, $[\boldsymbol{\Lambda}]$ は λ_i からなる対角行列である. また, $\{\boldsymbol{\eta}\}$ は期待値ゼロの標準正規乱数から成るベクトルである.

3　PC 展開

ランダムデータ $\{\boldsymbol{\eta}\}$ を次の PC 展開 [3)] で与える.

$$\{\boldsymbol{\eta}\} = [\boldsymbol{y}]\{\boldsymbol{\psi(\xi)}\} \tag{5}$$

ここで, $\{\psi(\xi)\}$ は Legendre 多項式より与えられるベクトル, $\{\boldsymbol{\xi}\}$ は各成分が一様乱数で与えられる比較的次元の小さなベクトル, $[\boldsymbol{y}]$ は係数行列である. なお, $\{\boldsymbol{\eta}\}$ が標準正規乱数であるため次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{T}}] &= [\boldsymbol{y}]E[\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{\boldsymbol{T}}][\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}] \\ &= [\boldsymbol{y}][\mathbf{I}][\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}] \\ &= [\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}] = [\mathbf{I}] \end{aligned} \tag{6}$$

よって, $[\boldsymbol{y}]$ の行ベクトルは互いに正規直交となる必要がある. $\{\boldsymbol{\xi}\}$ の具体値を $\{\xi_{ij}\}$　$(i = 1, ..., n_g\ j = 1, ..., m)$ として $[-1, 1]$ の一様乱数により生成する. 式 (6) を満たすように生成した, ある $[\boldsymbol{y}]$ に対して $\{\boldsymbol{\eta_i}\}$ を次式により求める.

$$\{\boldsymbol{\eta_i}\} = [\boldsymbol{y}]\{\boldsymbol{\Psi(\xi_i)}\} \tag{7}$$

$\{\boldsymbol{\eta_i}\}$ より, $\{\boldsymbol{\eta}\}$ の確率密度関数 p_η をカーネル密度推定により次式で近似する.

$$p_\eta = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_0}\frac{1}{h_j}K(\frac{\eta-\eta_j}{h_j}) \tag{8}$$

ここで, h_j はバンド幅である. また, カーネル関数 K にはガウスカーネルを用いた. 式 (6) を満たす $[\boldsymbol{y}]$ をランダムに生成し, 最適な $[\boldsymbol{y}]$ を次の対数尤度最大化に基づいて探索する.

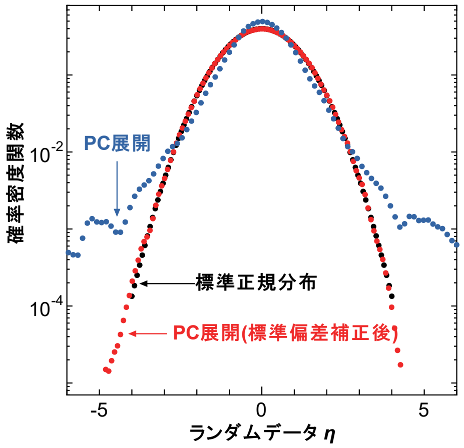
$$L(y) = \sum_{i}^{n}\log p_\eta \tag{9}$$

4　解析結果 (ランダムデータ $\{\boldsymbol{\eta}\}$)

4.1　PC 展開に基づく検証

PC 展開を用いてランダムデータ $\{\boldsymbol{\eta}\}$ を生成した. 解析結果を**図–1** に示す. Legendre 多項式最大次数は

15, 変数 $\boldsymbol{\xi}$ の次元 n_g は 3 とした．また, $\boldsymbol{\xi}$ の生成数 m は 5000 である．本来, $\{\boldsymbol{\eta}\}$ は標準正規乱数になることを想定して作成されるが, 特に低確率域において適切な確率分布を示していないことがわかる．そこで, 生成された $\{\boldsymbol{\eta}\}$ 毎に標準偏差を標準正規乱数と同様に 1 となるよう補正した．その結果, 標準正規乱数と概ね一致する確率分布が得られた．



図–1 PC 展開にて生成した $\{\boldsymbol{\eta}\}$ の確率密度関数

5　解析結果 (初期通り変位 $\{\mathbf{W}\}$)

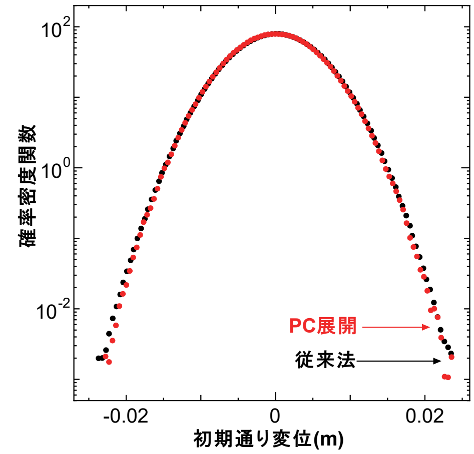
標準偏差を補正した $\{\boldsymbol{\eta}\}$ を用いて初期通り変位を生成する．**表–1** の条件に従い, 解析を行った．解析結果を**図–2** に示す．従来法と比較し, 良好な再現性を確認できる．

表–1　初期通り変位波形生成条件

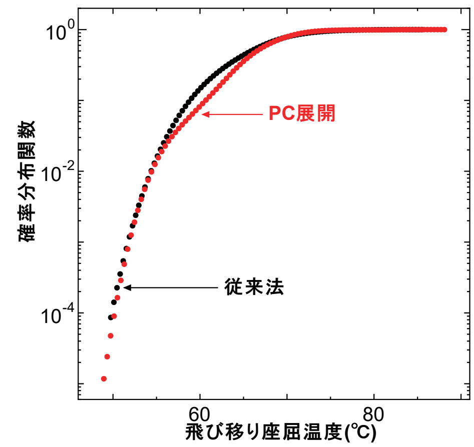
n_{pw}	Legendre 多項式最大次数	15
n_g	ξ の次元	3
n_w	通り変位節点数	720
n_0	$\{\boldsymbol{\eta}\}$ の次元	485
Δx	通り変位節点間隔	1.0(m)
d	相関長	2.84(m)
σ_w	通り変位標準偏差	0.005(m)

6　解析結果 (座屈温度)

生成した通り変位にて座屈解析を行った．また今回は, 大きな軌道変位が発生し出す飛び移り座屈[4] 温度について解析を行った．解析条件は文献[1] に従う．解析結果を**図–3** に示す．こちらも通り変位同様, 従来法と比較し良好な再現が認められており, 特に低確率域で良好な結果が得られている．



図–2　初期通り変位波形 $\{\mathbf{W}\}$ の確率密度関数



図–3　飛び移り座屈温度の確率分布関数

7　おわりに

PC 展開を用いてランダムデータ $\{\boldsymbol{\eta}\}$ を生成した．標準偏差を補正することによって精度の良い標準正規乱数を生成することができた．これを用いて初期通り変位生成や座屈解析を行ったところ, 従来法と遜色のない解析結果を得ることができた．今後は $[\boldsymbol{y}]$ の探索数や多項式の最大次数の必要範囲を検討する．一方で, 標準偏差の補正を必要としない PC 展開の構成についても検討する必要がある．

参考文献

1) 岩井翔，阿部和久，紅露一寛：通り変位と道床横抵抗力のバラツキを考慮した軌道座屈余裕度の確率的評価, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.25, pp.69-76, 2021.
2) 阿部和久，水野雄太，紅露一寛：通り変位波形におけるバラツキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.24, pp.167-174, 2020.
3) G. Perrin, C. Soize, D. Duhamel, C. Funfschilling : Track irregularities stochastic modeling, Probabilistic Engineering Mechanics 34, pp.123-130 ,2013
4) 伊藤文人, 構造安定性, 2.5 節, 技報堂出版, 1989.