

# 有限長フローティングスラブ軌道の効率的分散解析法

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員 塚本 夢菜  
新潟大学工学部工学科 正会員 阿部 和久  
新潟大学工学部工学科 正会員 紅露 一寛

## 1 はじめに

既往の研究<sup>1)2)</sup>では、防振マット工法を用いた地下鉄軌道を対象に、定点加振応答を求めた。なお当該軌道のスラブ長は30m程と長いため、所定の減衰設定下で、それを無限長スラブで近似した。しかし分散曲線を求める場合、無減衰系が対象となる。そのため、スラブの長短に関わらず防振マット工法を用いた軌道の分散曲線は、スラブ端部からの反射波の影響により、無限長スラブのそれと本質的に異なるものになると考えられる。

そこで本研究では、防振マット工法を用いた有限長スラブ軌道の分散曲線を求め、当該軌道の基本振動特性について調べる。ただし、軌道系の周期長が約30mと長くなるため、前述のような従来法を用いる場合、1ユニットセルの長尺化による計算負荷の増大が懸念される。そこで、2次元周期場を対象に提案された効率的分散解析法<sup>3)</sup>の軌道系への適用を試みる。具体的には、有限長スラブを無限長スラブに置き換え、スラブ端からの反射波を等価な加振力で表現する。解析例を通し、本手法の有効性や、軌道構造が分散特性に及ぼす影響などについて検討する。

## 2 有限長スラブ軌道の分散解析手法

### 2.1 対象とする軌道



図-1 本研究の軌道モデル縦断面図

本研究で対象とする軌道モデルを 図-1 に示す。レールは無限長とし、まくらぎ間隔  $L$  で軌道パッドを介してコンクリートスラブ上に直結離散支持される軌道を考える。コンクリートスラブは有限長とし、隣接スラブ間の間隙を含めて1区間の長さを  $D = NL$  ( $N$  は

整数) で与える。また、当該スラブは防振マットで剛基礎上に連続支持されているものとする。この時、軌道は周期長  $D$  の無限周期構造で与えられる。

加えて、本解析ではレールとスラブを Timoshenko ばり、軌道パッドと防振マットをそれぞれ離散バネと連続支持バネでモデル化する。

### 2.2 提案法の概要

図-2 の上図のように、隣接する左右のスラブをモデル化したはり要素の節点を、それぞれ A, B とおく。なお、実際の離散化では、図-1 のようにレールと連結した連成系を対象としている。本来は節点 A, B 間には隙間が存在しているので、それらの節点力はゼロとなる。当該問題を、図-2 の下図のように、両節点間にもはり要素を設けた連続なスラブに置き換える。その下で、左右のスラブに対応する領域の波動場が本来の有限長スラブのそれと一致するように、A, B 点に一連の節点力ベクトル  $\{F_s\}$  を設定する。なお、Floquet 原理<sup>4)</sup> より、本定常波動場における加振力  $\{F_s\}$  は次の条件を満たす。

$$F_s(x + D) = e^{-ikD} F_s(x) \quad (1)$$

ここで、 $x$  は軌道長手方向座標、 $k$  は Floquet 波数である。図-2 の下図の加振問題において、節点 A, B に作

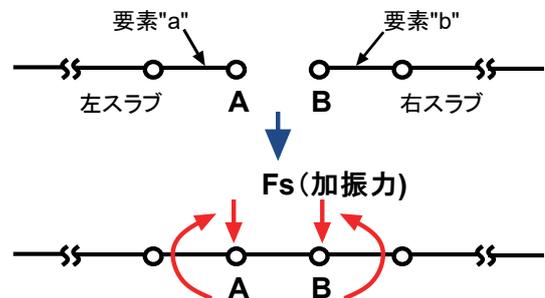


図-2 提案法の加振問題

用している節点力ベクトル  $\{F_s\}$  による、要素 a の A 点および要素 b の B 点での内部節点力ベクトルを並べたベクトルを  $\{F_0\}$  とおく。これらの関係が次式で与えられているものとする。

$$[\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_s\} = \{\mathbf{F}_0\} \quad (2)$$

ここで、図-2の下図の加振問題が上図の有限長スラブの応答を再現しているものであるならば、A,B点の内部節点力ベクトル $\{\mathbf{F}_0\}$ はゼロとなる。したがって、有限長スラブ軌道における波動モードの存在条件は次式で与えられる。

$$[\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_s\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3)$$

式(3)の非線形固有値問題をBlock SS方を使って解く<sup>3)</sup>ことで、分散曲線を求める。なお、この行列 $[\mathbf{B}]$ は、既往の研究<sup>3)</sup>より、周期長 $L$ の下、Floquet変換を介して節点A,Bを単調加振した問題を順次解くと得られる。

### 3 解析結果

#### 3.1 解析条件

有限長スラブ軌道の分散解析を行うに当たり、表-1のように軌道条件を設定した。ただし、対称条件によりコンクリートスラブの幅は本来のスラブ幅の半分(レール1本分)に設定した。また、60kgレールを対象とし、レールはレール支持間隔を6要素で、スラブは2要素で離散化した。その下で、図-2上図の節点A,B間の間隔を1要素(6cm)で与えた。

表-1 軌道条件

レール支持間隔	0.6m
スラブのヤング率	32.4GPa
スラブのポアソン比	0.2
スラブ幅(半分)	1.25m
スラブ厚さ	0.4m
防振マットの 単位長さ当たりのバネ定数	$12.5 \times 10^6 N/m^2$
軌道パッドのバネ定数	$30 \times 10^6 N/m$
スラブの単位体積質量	$2400 kg/m^3$

#### 3.2 提案法の妥当性の検討

まず本手法の妥当性を確認するために、スラブ長を1ユニットとした従来法と、レール支持間隔 $L$ を1ユニットとした提案法とで同様の解析を行った。これにより得た分散曲線を図-3に合わせて示す。ただしスラブ長は18mとし、従来法と提案法の分散曲線はそれぞれ黒色とオレンジ色で示している。

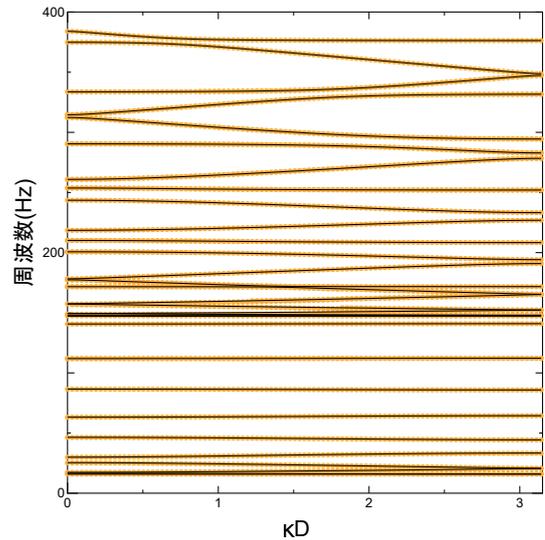


図-3 分散曲線(提案法と従来法)

図-3において、提案法の分散曲線と従来法の分散曲線はほぼ完全に一致している。これより、本提案手法の妥当性が確認できる。

#### 3.3 提案法の効率性の検討

続いて、スラブ長を6m~30mまで6mずつ変化させて、分散解析に費やした時間を計測した。図-4は、横軸にスラブ長、縦軸に解析時間をとったもので、赤線が従来法、青線が提案法を示している。

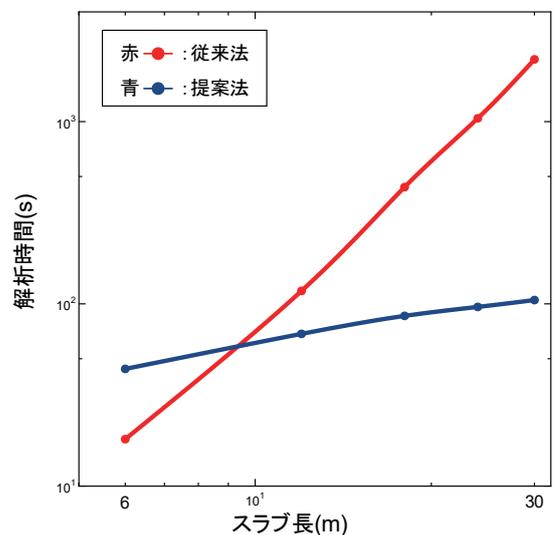


図-4 提案法と従来法の解析時間の比較

スラブ長6mの場合は、従来法の方が解析時間が短い結果となったものの、その2倍以上のスラブ長においては、提案法の方が計算時間が短くなっている。例えばスラブ長が30mの場合、従来法では約2200secを要したのに対し、本手法では約105secとなっており、20倍以上の高速化が図られている。以上より、スラブ

長が長くなるほど従来法と提案法の解析時間の差が広がり、本提案法はスラブ長が長い問題において、より効率的な分散解析法であることが分かる。

### 3.4 防振マットのバネ定数と軌道パッドのバネ定数が分散曲線へ及ぼす影響

図-3の分散曲線の解析条件から軌道パッドのバネ定数を  $60 \times 10^6 \text{N/m}$ 、スラブ長を 6m に変更して求めた分散曲線を黒線で図-5に示す。また、この解析条件から防振マットの単位長さ当たりのバネ定数を  $16.7 \times 10^6 \text{N/m}^2$  に変更した分散曲線と軌道パッドのバネ定数を  $90 \times 10^6 \text{N/m}$  に変更した分散曲線も、それぞれオレンジ色と青色で図-5に合わせて示す。

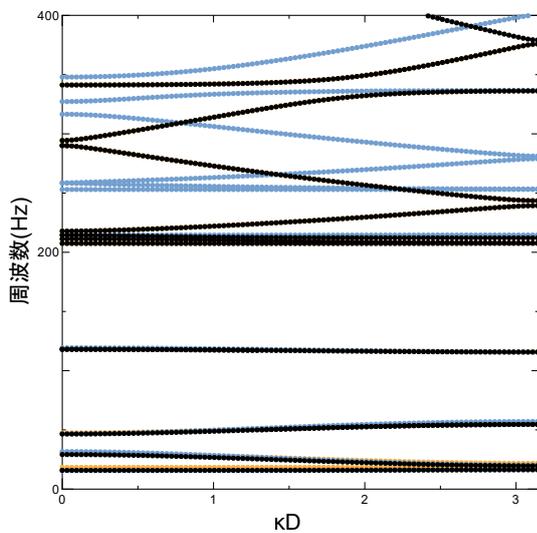


図-5 軌道構造が分散曲線に及ぼす影響 (スラブ長: 6m)

防振マットのバネ定数を増加させることで、低周波数域 (20~50Hz) の分散曲線がわずかに高周波数側に移動するものの、全体的にほとんど影響は認められない。一方、軌道パッドのバネ定数を増加させると、低周波数域への影響はほとんど認められないが、レール振動が主体となる高い周波数域の分散曲線では高周波数側に移動する様子が認められる。

### 3.5 スラブ長が分散曲線に及ぼす影響

本提案法により、スラブ長の長い有限長スラブ軌道の問題についてもかなり短い時間で検討することが可能となった。そこで、スラブ長の違いによる分散曲線の差異を確認するため、スラブ長 6m および 30m の 2 ケースについて分散解析を行った。これらの結果を、図-6、図-7にそれぞれ示す。なお、軌道パッドのバネ定数を  $60 \times 10^6 \text{N/m}$  に変更して解析を行った。また、比較のため、両図には無限長スラブ軌道の分散曲線も

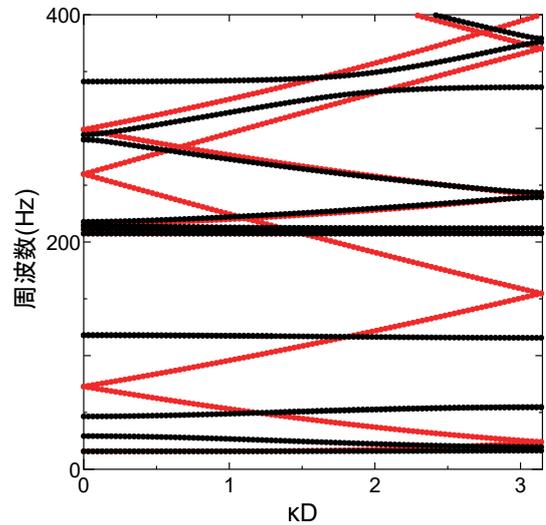


図-6 無限長スラブ軌道の分散曲線との比較 (スラブ長: 6m)

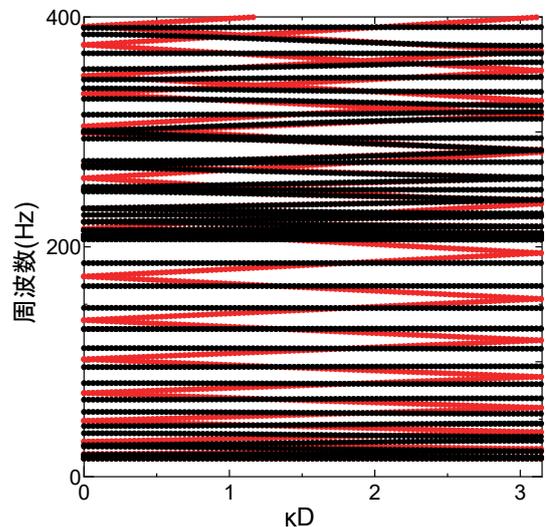


図-7 無限長スラブ軌道の分散曲線との比較 (スラブ長: 30m)

合わせて赤線で示した。

図-6より、無限長スラブ軌道の分散曲線が、約 15Hz から始まるものと、約 207Hz から始まるものの 2 種類から構成されている様子が窺える。前者は防振マットとスラブから成るバネ・質点系の固有振動数に概ね一致し、後者は軌道パッドとレールから構成される系の固有振動数に一致していることが別の解析で確認できた。以上より、これらの分散曲線がそれぞれスラブおよびレールが主体的に振動するモードに対応していると考えられる。

また、有限長スラブ軌道の分散曲線では、約 207Hz 以下の周波数域において分散曲線が波数に依存せずほぼ一定の周波数に離散的に分布している。これは、前

述のとおり、この周波数域のモードがスラブ主体のものであるため、レールを介した波動伝搬の影響はわずかなものであり、有限長スラブの固有振動モードが支配的となることに起因していると考えられる。これに対し約 207Hz 以上の周波数域では、スラブ主体の振動に加え、レール内を伝搬する波動が主体のモードも混在している。そのため、約 207Hz 以上の周波数域には、約 207Hz 以下の周波数域に比べ、分散曲線が広い周波数域にわたり分布している。

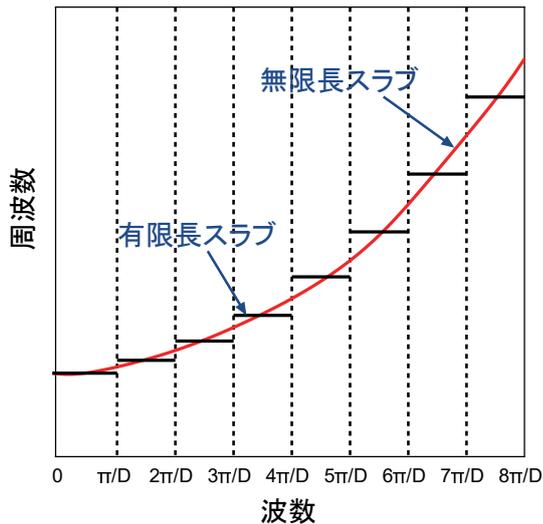


図-8 分散曲線展開図

続いて、スラブ長  $D = 30\text{m}$  に対する分散曲線である図-7 に着目する。スラブ長  $D = 6\text{m}$  での分散曲線である図-6 と同様に、約 15Hz と約 207Hz が各モードの下端周波数を与えている様子が確認できる。なお、図-7 で赤線で示す無限長スラブの分散曲線は、本来図-6 のそれと同じである。ただし、図-7 の横軸の範囲は  $0 \leq k \leq \pi/30$  であり、図-6 の分散曲線を  $k = \pi/30(1/m)$  の間隔で折りたたんだ図が得られる。例えば、低周波数域側から  $i$  番目の周波数域における分散モードを特徴付ける調和振動波形の波数を  $k_i$  とおくと、Floquet 波数  $k$  に対して次の関係が成り立つことが知られている<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned} k_1 &= k, k_2 = -k + \frac{2\pi}{D}, k_3 = k + \frac{2\pi}{D}, \\ k_4 &= -k + \frac{4\pi}{D}, k_5 = k + \frac{4\pi}{D}, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

そのため、 $D = 30\text{m}$  に対する図-7 では、 $D = 6\text{m}$  に対する図-6 より狭い周波数間隔で分散曲線が分布することとなる。黒線で示した有限長スラブの分散曲線でも、同程度の周波数間隔で分布している。

図-7 の約 207Hz 以下のスラブ振動主体のモードでは、その分散曲線と無限長スラブの分散曲線とが、 $kD = \pi/2$  付近で交差している。このことより、以下のような傾向が推測できる。有限長スラブ軌道におけるスラブ振動主体の分散曲線は、前述の通り、当該スラブの固有振動数に概ね対応して周波数方向に離散的に分布する。これを式 (4) に従い波数方向に展開すると、図-8 に示すイメージ図の様に、無限長スラブ軌道の分散曲線に対する区間一定近似が得られる。よって、スラブ長  $D$  を長くしていくと、分散曲線は無限長スラブ軌道のそれに収束することが推測できる。

#### 4 まとめ

レール支持間隔とスラブ長の 2 つの異なる周期性を持つ軌道の分散曲線を、前者の周期性を利用して効率的に求める手法を構成した。本手法と、スラブ長を 1 ユニットとする従来法との解析結果より、提案法が有限長スラブ軌道の分散解析に対して妥当な手法であることを確認した。また、従来法に比べて、本手法による分散解析では、スラブ長が長い問題において解析時間が短縮されることも分かった。さらに、構成した本手法を用いた解析結果より、防振マットのバネ定数は、本研究で対象とした範囲内において、分散特性にほとんど影響しないことが分かった。加えて、無限長スラブ軌道と有限長スラブ軌道の分散曲線の比較より、スラブ長が長くなる程、有限長スラブ軌道の分散曲線が無限長スラブ軌道のそれに近づく傾向が認められた。

#### 参考文献

- 1) 阿部和久, 山田高也, 古田勝, 末原美智子, 紅露一寛: 地下鉄トンネル・地盤連成系の三次元加振応答解析, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.74, No.2 (応用力学論文集 Vol.21), I.523-I.534, 2018.
- 2) 阿部和久, 佐藤和輝, 紅露一寛: 列車走行による地下鉄トンネルのランダム振動解析, 第 25 回応用力学シンポジウム, 2B01-06-03, 2022.
- 3) 阿部和久, 寛拓哉, 紅露一寛: 等間隔に欠陥が存在する周期場を対象とした効率的分散解析手法, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.73, No.2 (応用力学論文集 Vol.20), I.133-I.141, 2017.
- 4) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝搬解析, 応用力学論文集, Vol.10, pp. 1029-1036, 2007.