

PC展開適用による軌道通り変位ランダムデータ生成法

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員 永谷 航太
 新潟大学工学部 正会員 阿部 和久
 新潟大学工学部 正会員 紅露 一寛

1 はじめに

これまで当研究室では、ランダムな通り変位を有するロングレール軌道の座屈確率特性について検討してきた^{1),2)}。その結果、同一の定常ランダム性を持つ通り変位でも座屈温度が大きく異なることが分かった。座屈温度が極端に低い通り変位に共通する特性を把握するためには、それらを効率的に生成・収集する必要がある。これまで、通り変位は固有モード展開で表しており^{1),2)}、一つの通り変位が500次元程度の展開係数で表現される。多数の通り変位を蓄積するには、非常に多くの情報量を扱う必要があり効率性に欠ける。そこで本研究では、上述の展開係数を多項式カオス展開(PC展開)で生成し、扱う情報量の圧縮を試みる。

2 軌道のモデル化

軌道座屈解析の実施に当り、本研究室で構築した数値軌道モデル²⁾を用いる。以下にその概略について述べる。軌道は図-1に示す様な、左右レールと等間隔 L で配置されたまくらぎとで構成された軌きようにより表す。レールは水平面内変位を考慮したEulerばり有限要素法で離散化し、有限変位理論に基づいてつり合い式を導出する。まくらぎは剛な棒と与え、レールたわみ方向バネ k_T を設定し、それによって両者間を結合する。なお、レール長手方向に関しては、レールとまくらぎを剛結し、同一変位を与えるものとする。まくらぎに作用する道床横抵抗力 f_T と縦抵抗力 f_L は、それぞれ次式で設定し、図-2の様な非弾性履歴を考慮する。

$$\begin{aligned} f_T &= f_{0T} \frac{u_{ST}}{a_T + |u_{ST}|} \\ f_L &= f_{0L} \frac{u_{SL}}{a_L + |u_{SL}|} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 f_0 は最終道床抵抗力。 u_S はまくらぎ変位、 a は道床抵抗力が $f_0/2$ となる時の変位であり、下付き添え字の T と L は、それぞれ横抵抗力と縦抵抗力に関する値であることを意味している。

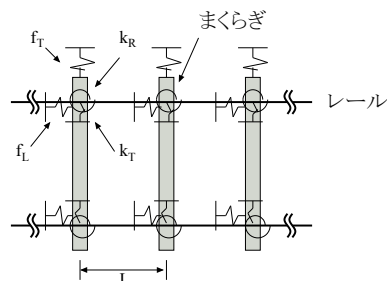


図-1 座屈解析に用いる軌道モデル

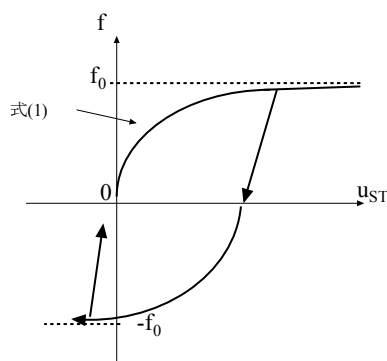


図-2 道床横・縦抵抗力の履歴モデル

3 ランダムな通り変位波形作成方法

通り変位波形を以下の距離相関関数 $R(x)$ に従う定常ランダムデータで生成する。

$$R(x) = \frac{\sigma^2}{1 + (x/d)^2} \quad (2)$$

ここで x は軌道長手方向距離、 σ は初期通り変位の標準偏差、 d は相関長である。

座屈解析では、軌道をはり要素に分割し、左端点から順に座標 x_i を設定する。1要素あたりの長さを Δx とすると、 i 番節点位置は $x_i = i\Delta x$ となる。 x_i における初期通り変位を w_{0i} とする。 w_{0i} を成分を持つベクトルを $\{\mathbf{W}_0\}$ とし当該ベクトルにおける分散共分散行列 $[\mathbf{C}]$ は次の期待値で与えられる。

$$[\mathbf{C}] = E(\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{W}_0^T) \quad (3)$$

$[\mathbf{C}]$ の i 行 j 列成分を c_{ij} とすると、それは次式で与えられる。

$$c_{ij} = R(|i - j|\Delta x) \quad (4)$$

ここで, $[\mathbf{C}]$ の固有値問題を以下の様に設定する.

$$[\mathbf{C}]\{\phi_i\} = \lambda_i\{\phi_i\} \quad (5)$$

$\{\mathbf{W}_0\}$ は, 式 (5) より求められた固有値 λ_i , 固有ベクトル ϕ_i から, 次式で生成される.

$$\{\mathbf{W}_0\} = [\Phi][\Lambda^{1/2}]\{\eta\} \quad (6)$$

ここで, $[\Phi]$ は ϕ_i を縦ベクトルとして並べて得られる行列, $[\Lambda]$ は λ_i からなる対角行列である. また, $\{\eta\}$ は期待値ゼロの標準正規乱数から成るベクトルである.

4 PC 展開

ランダムデータ $\{\eta\}$ を次の PC 展開³⁾ で与える.

$$\{\eta\} = [\mathbf{y}]\{\psi(\xi)\} \quad (7)$$

ここで, $\{\psi(\xi)\}$ は Legendre 多項式より与えられるベクトル, $\{\xi\}$ は各成分が一様乱数で与えられる比較的次元の小さなベクトルである. なお, $\{\eta\}$ の次元を n_p とする. $M \geq n_p$ 個の $\{\eta\}$ を並べた行列を $[\mathbf{H}]$ とおく. 同様に $\{\xi\}$ をランダムに生成し, それより得られた M 個の行列を $[\Psi]$ とおく. すると, 次式が成り立つ.

$$[\mathbf{y}][\Psi] = [\mathbf{H}] \quad (8)$$

$\{\psi\}$ の直交性 $E(\psi\psi^T) = [\mathbf{I}]$ は次式により表すことができる.

$$\begin{aligned} E(\psi\psi^T) &= \int_{\xi} p_{\psi}(\xi) \psi(\xi) \psi^T(\xi) d\xi \\ &\equiv \sum_j p_{\psi}(\xi_j) \psi(\xi_j) \psi^T(\xi_j) \Delta\xi \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, $p_{\psi}(\xi)$ は確率密度関数であり, Legendre 多項式の場合は一定であるため次式を満たす.

$$\int_{\xi} p_{\psi} d\xi = p_{\psi} \int_{\xi} d\xi = p_{\psi} V = 1 \quad (10)$$

なお, n_g を $\{\xi\}$ の次元とすると $V = 2^{n_g}$ である. さらに, 式 (9) の $\{\xi_i\}$ を V 中に一様に分布する M 個のランダムな点で与えられると仮定すると, 次式を得る.

$$E(\psi^T\psi) \equiv \sum_j \frac{1}{V} \psi_j \psi_j^T \frac{V}{M} = \frac{1}{M} [\Psi\Psi^T] \quad (11)$$

$\{\psi\}$ の直交性 $E(\psi\psi^T) = [\mathbf{I}]$ と式 (11) より, 次式を得る.

$$\frac{1}{M} [\Psi][\Psi^T] \simeq [\mathbf{I}] \quad (12)$$

式 (8), 式 (12) より, $[\mathbf{y}]$ は次式で近似できる.

$$[\mathbf{y}] \simeq \frac{1}{M} [\mathbf{H}\Psi^T] \quad (13)$$

5 PC 展開に用いる多項式

前述のとおり, 本研究では PC 展開に Legendre 多項式を用いる. 表-1 に Legendre 多項式の具体例を示す.

表-1 Legendre 多項式の具体例

次数	n	Legendre 多項式 $L_n(\xi)$
0		1
1		ξ
2		$\frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)$
3		$\frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi)$
4		$\frac{1}{8}(35\xi^4 - 30\xi^2 + 3)$
5		$\frac{1}{8}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi)$
6		$\frac{1}{16}(231\xi^6 - 315\xi^4 + 105\xi^2 - 5)$
7		$\frac{1}{16}(429\xi^7 - 693\xi^5 + 315\xi^3 - 35\xi)$
\vdots		\vdots

Legendre 多項式は式 (14) のような直交性を有する.

$$\int_{-1}^1 L_m(\xi) L_n(\xi) d\xi = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (14)$$

ここで, δ_{mn} はクロネッカーのデルタである.

Legendre 多項式 $L_m(\xi)$ を式 (15) のように規格化する.

$$\hat{L}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{2n+1}}} L_n(\xi) \quad (15)$$

$$\int_{-1}^1 \hat{L}_m(\xi) \hat{L}_n(\xi) d\xi = \delta_{mn} \quad (16)$$

式 (16) の規格化された Legendre 多項式の直交性を用いて PC 展開を試みる.

6 解析結果 (ランダムデータ $\{\eta\}$)

6.1 PC 展開に基づく検証

PC 展開を用いてランダムデータ $\{\eta\}$ を作成する. この時, Legendre 多項式最大次数は 25, 変数 ξ の次元は 3 とした.

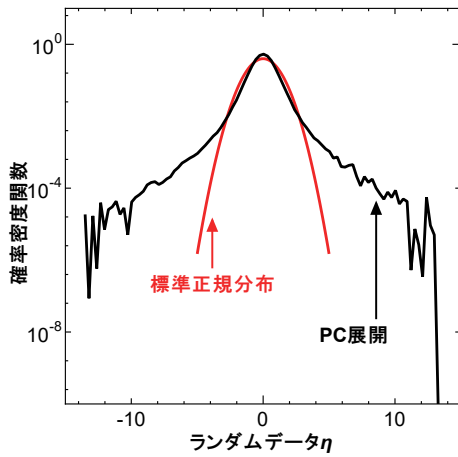


図-3 PC 展開にて生成した $\{\eta\}$ の確率密度関数

その確率密度関数を図-3 に示す。本来, $\{\eta\}$ は標準正規乱数になることを想定して作成されたが, 特に低確率域において適切な確率分布を示していないことがわかる。

6.2 変数変換に基づく検証

作成された $\{\eta\}$ について標準正規分布に近い確率分布形状となるように変数変換を行った。

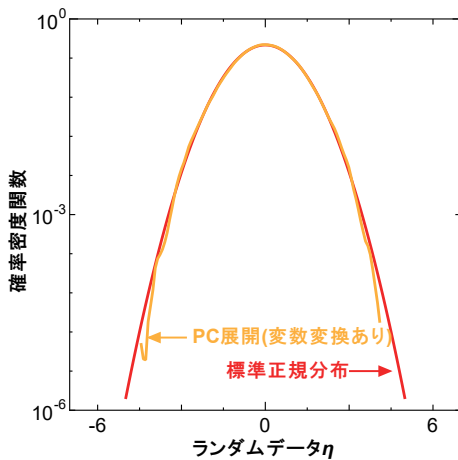


図-4 6.1 に変数変換を施した $\{\eta\}$ の確率密度関数

変数変換後の $\{\eta\}$ を図-4 に示す。標準正規分布に近い確率分布を有する $\{\eta\}$ を得ることができたため, 初期通り変位波形の生成を試みる。

7 解析結果 (初期通り変位波形 $\{W_0\}$)

6.2 の PC 展開にて生成した $\{\eta\}$ を用いて初期通り変位を生成する。表-2 の条件に従い, 解析を行った。

表-2 初期通り変位波形生成条件

n_{pw}	Legendre 多項式最大次数	25
n_g	ξ の次元	3
n_w	初期通り変位節点数	720
Δx	初期通り変位節点間隔	1.0(m)
d	相関長	2.84(m)
σ_w	標準偏差	0.004(m)

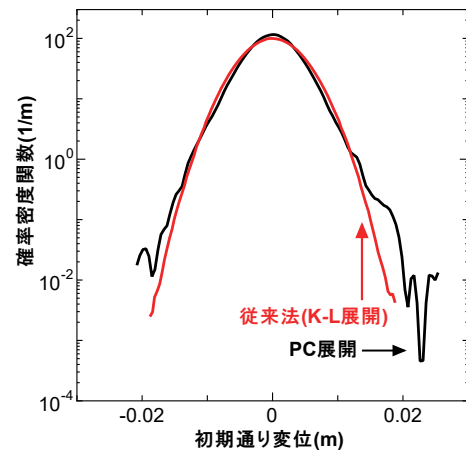


図-5 PC 展開にて生成した $\{W_0\}$ の確率密度関数

通り変位波形の確率密度関数を図-5 に示す。全体的な確率分布形状は従来法¹⁾と大きく変わらないものの, 低確率域になるにつれて過度に大きな通り変位が生成されていることが確認できる。

8 解析結果 (座屈温度)

8.1 生成した通り変位波形に基づく検証

図-1 に示したとおり, 軌道を左右レールと離散まくらぎから構成される軌きょうによりモデル化した。以下の解析では 50kgN レールを想定し, レールや道床横・縦抵抗力に関する各種設定値を表-3 の様に与えた。なお, 表-3 において, EA, α はレールの伸び剛性と線膨張係数である。左右レール共にまくらぎ 1 区間 (0.6m) 当りをはり要素で 2 等分割し, 軌道をまくらぎ 1200 区間 (720m) で与えた。また, 今回は大きく軌道座屈が発生する飛び移り座屈温度⁴⁾に焦点を置いて解析を行った。

座屈解析における確率分布関数を図-6 に示す。飛び移り座屈温度において, 従来法と大きく異なる確率分布を有することが確認できる。

表-3 座屈解析条件

EI	($N \cdot m^2$)	6.63×10^5
EA	(GPa)	1.32
α	($1/^\circ C$)	12×10^{-6}
L	(m)	0.6
k_T	(MN/m)	40.0
k_R	(kN · m/rad)	20.0
f_{0T}	(kN)	5.5
a_T	(mm)	1.0
f_{0L}	(kN)	2.5
a_L	(mm)	1.0

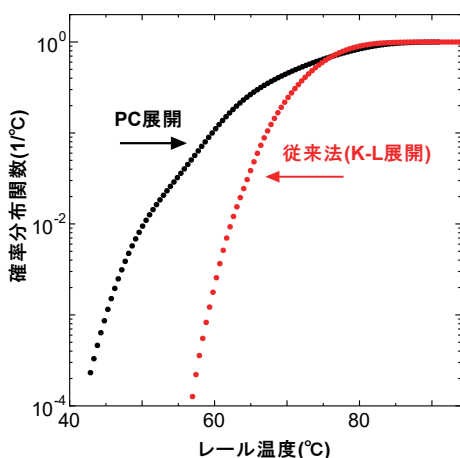


図-6 PC展開にて生成した初期通り変位波形から得られた飛び移り座屈温度の確率分布関数

8.2 標準偏差を補整した通り変位に基づく検証

PC展開にて $[y]$ を生成する際に設定する初期通り変位波形の標準偏差 σ_w と、実際に生成される初期通り変位波形の標準偏差 σ_r は若干異なる値を取る。ここで、それらの比を S_r と表し、初期通り変位にかけることによって通り変位の標準偏差が所定の値となるように補正を行った。

$$S_r = \frac{\sigma_w}{\sigma_r} \quad (17)$$

$$\{W'_0\} = S_r \{W_0\}$$

本補正適用後の座屈解析結果を図-7に示す。式(17)の補正により、従来法と遜色のない確率分布を得ることができた。

9 おわりに

本研究では軌道の初期通り変位波形に用いるランダムデータにPC展開を適用することによって情報量の圧縮を試みた。解析の結果、ランダムデータ $\{\eta\}$ は標

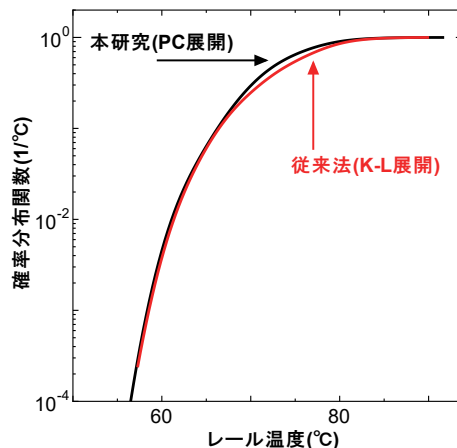


図-7 初期通り変位の標準偏差に補正を加えた飛び移り座屈温度の確率分布関数

準正規乱数とは異なる確率分布を有し、そのままではランダムデータとして適切でないことがわかった。生成された $\{\eta\}$ に、標準正規乱数に近い確率分布となるように変数変換を施した。次に、変数変換後の $\{\eta\}$ を用いて初期通り変位波形を生成し、その妥当性を検証した。解析の結果、全体の確率分布形状は従来法と一致しているものの、低確率域にて従来法よりもやや大きな通り変位が生成されることが分かった。次に、生成された初期通り変位波形の座屈解析を行った。飛び移り座屈温度において、従来法と大きなずれを確認できた。そこで、初期通り変位の標準偏差を所定の値となるよう補正し座屈解析を行ったところ、従来法と同様な解析結果を得ることができた。

PC展開を適用することによりランダムデータの情報を圧縮し、従来法と同様な座屈解析結果を得ることができた。一方で、ランダムデータ $\{\eta\}$ に対する変数変換や、初期通り変位標準偏差の補正など、様々な処理が必要となった。今後はこれらの処理を要しないPC展開の構築についてさらに検討を進めていくつもりである。

参考文献

- 1) 岩井翔, 阿部和久, 紅露一寛: 通り変位と道床横抵抗力のバラツキを考慮した軌道座屈余裕度の確率的評価, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.25, pp.69-76, 2021.
- 2) 阿部和久, 水野雄太, 紅露一寛: 通り変位波形におけるバラツキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.24, pp.167-174, 2020.
- 3) G. Perrin, C. Soize, D. Duhamel, C. Funfschilling: Track irregularities stochastic modeling, Probabilistic Engineering Mechanics 34, pp.123-130, 2013
- 4) 伊藤文人, 構造安定性, 2.5節, 技報堂出版, 1989.