河川堤防のリスクマネジメントの高度化を目指した
パイピング危険箇所の空間分布推定と認識論的不確実性の定量化

新潟大学大学院　学生会員　○小出央人
新潟大学自然科学系　　正会員　　大竹　雄

1.　研究の背景と目的

近年の大規模な土木構造物の被害事例として，矢部川破堤や福岡駅前陥没事故が挙げられる．これら被害事例に共通するのは，構造物全体ではなく，局所的に生じた現象により大きな被害（構造物の要求性能をみなさない状態）に至ったという点である．このような地盤の空間変動性のモデル化について，地盤の信頼性解析では，従来地盤をトレンド成分一定とした定常確率場が採用される．このような確率場によるモデル化の導入は，先の事例にあるような局所的な現象の見落としのリスク定量化が期待されている．しかし，必ずしも定常性が仮定できない可能性もあり，地盤の局所的な挙動の評価，見落としリスクの定量化が重要な課題となっている．

本研究では，空間変動を持つ情報の確率的空間モデリング方法の高度化と推定精度の向上を目指す．具体的には，古典的な空間分布推定手法であるSimple Kriging（ベイズモデリング）と階層ベイズモデル（より柔軟なベイズモデリング）を，ある1級河川堤防のパイピング危険度推定に適用し，実用性の比較検討を行う．

2.　各モデリング手法の概要

2.1. 状態空間モデル

本研究では，2つの手法を比較するために状態空間モデルの概念について解説する．ここで状態空間モデルとは，図1のグラフィカルモデルに示すように，直接的に観測されない潜在的な変数を仮定することにより，観測時系列データに含まれる2種類の誤差である，システムノイズと観測ノイズを分離した推定を実現する統計モデルである．

2.2. Simple Kriging

ここでは，空間分布推定の1手法であるSimple Krigingの導出を行う．まず，観測地点，推定地点それぞれにおける状態量を$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$とし，合わせて$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)^T$とする．$\boldsymbol{x}$は平均値$\overline{\boldsymbol{x}}$にシステムノイズ$\boldsymbol{w}$が加わったものとし，観測量$\boldsymbol{z}$は，状態$\boldsymbol{x}_1$に観測ノイズ$\boldsymbol{v}$が混入したものとすると，状態方程式及び観測方程式は以下のように定義される．

$$\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{w} = (\overline{\boldsymbol{x}}_1, \overline{\boldsymbol{x}}_2)^T + \boldsymbol{w} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{I}, 0]\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{2}$$

$\boldsymbol{I}$は単位行列である．以上より，$\boldsymbol{x}$は平均値ベクトル$\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{\boldsymbol{x}}_1, \overline{\boldsymbol{x}}_2)^T$，共分散行列$\boldsymbol{M}$の正規分布に従う．これが$\boldsymbol{x}$の事前分布$p(\boldsymbol{x})$である．共分散行列$\boldsymbol{M}$は以下で表される．

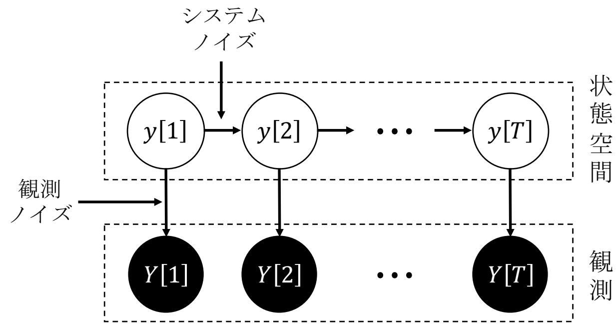

図 1　状態空間モデルのグラフィカルモデル

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{3}$$

事前分布$p(\boldsymbol{x})$は以下に示すベイズの定理により，事後分布$p(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z})$に更新される．

$$p(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z}) = p(\boldsymbol{z}/\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})/p(\boldsymbol{z}) \tag{4}$$

ベイズ更新により得た事後分布$p(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{z})$は，平均値ベクトル$\widehat{\boldsymbol{x}} = (\widehat{\boldsymbol{x}}_1, \widehat{\boldsymbol{x}}_2)^T$，共分散行列$\boldsymbol{P}$である正規分布となる．

$$\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_1 \\ \overline{\boldsymbol{x}}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} \\ \boldsymbol{M}_{21} \end{bmatrix} [\boldsymbol{M}_{11} + \boldsymbol{R}]^{-1}(\boldsymbol{z} - \overline{\boldsymbol{x}}_1) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} \\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22} \end{bmatrix} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{P}_{ij} = \boldsymbol{M}_{ij} - \boldsymbol{M}_{i1}[\boldsymbol{M}_{11} + \boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{M}_{1j}$である．(5)式における$\widehat{\boldsymbol{x}}_2$がSimple Krigingによる推定値となる．

2.3. 階層ベイズモデル

冒頭で述べた「より柔軟なモデリング」と呼ばれるのは，モデルのそれぞれパラメータ，例えば平均値（トレンド）について，場所による違いの効果や相関関係などをパラメータの関数とする階層構造として設定できるからである．これによって，空間的に相関を持つ問題にも，柔軟かつ合理的な推定が可能になると著者らは考えている．

今回扱う問題では，空間的相関構造を持ち，現在の状態tが過去の状態$t-1, t-2$に関連があるという仮定を置くと，状態方程式は次式で示される．

$$\mu[t] = (2\mu[t-1] - \mu[t-2]) + \varepsilon_\mu[t-2] \quad (t = 3, \cdots, T) \tag{7}$$

$$\varepsilon_{sys}[t] \sim \mathrm{Normal}(0, \sigma_\mu) \qquad (t = 1, \cdots, T-2) \tag{8}$$

ここで，ε_{sys}はシステムノイズであり，各状態tで独立であり，平均0，標準偏差σ_μの正規分布に従うとする．また状態$t = 1,2$の時は，この仮定を置くことができないため，それぞれ以下のようになる．

$$\mu[1] = \mu_0 + \varepsilon_\mu[1] \tag{9}$$

$$\mu[2] = \mu[1] + \varepsilon_\mu[2] \tag{10}$$

ここでμ_0は，初期値を表す．上記で求めた状態方程式より観測方程式は次式で定義される．

$$Y[t] = \mu[t] + \eta_{obs}[t] \qquad (t = 1, \cdots, T) \tag{11}$$

$$\eta_{obs}[t] \sim \mathrm{Normal}(0, \sigma_{obs}) \quad (t = 1, \cdots, T) \tag{12}$$

ここで，$\eta_{obs}[t]$はシステムノイズであり，各状態tで独立であり，平均 0，標準偏差σ_{obs}の正規分布に従うとする．

3.　実データに基づく試算

3. 1. 問題設定

用いるデータは，Timo[1]が提案した方法を用いて，著者らが先に解析を行った，ある 1 級河川堤防のパイピング危険度評価結果を用いる(**図 1**)．**図 1** の上段には，対象の河川堤防の地質縦断図を，中段には，縦断方向に 200m 間隔で計算を行ったパイピングに至る限界水位(m)を示している．限界水位は，低い値を示す程，パイピングに至りやすいことを示しており，空間的に相関構造を持ちながらも，複雑に変化していることが見て取れる．また，下段には，本解析のために意図的に計算点を間引き調整した結果（以後，間引き調整データと呼称）を示している．本解析では，この 200m 間隔で計算を行った結果を真の値であると仮定し，間引き調整データでこれらを外挿できるかを，各モデルで検証し，推定精度についての比較を行う．

3. 2. 解析結果と考察

解析結果を**図 2** に示す．**図 2** 上段が Simple Kriging，下段が階層ベイズモデルによる限界水位の空間分布予測結果である．青と赤のプロットはそれぞれ，（真値と仮定する）200m 間隔のデータと間引き調整データである．また灰色と薄灰色の網掛け部分は，それぞれ，$\mu \pm 1\sigma, \mu \pm 2\sigma$の予測区間を示している．

Simple Kriging と階層ベイズモデルを比較すると，Simple Kriging の方が，$\mu \pm 2\sigma$を逸脱するデータが多いことが分かる．すなわち，Simple Kriging よりも階層ベイズモデルの方が推定分散を適切にモデル化出来ている可能性が高い．ただし階層ベイズモデルにおいても，9km，23km に大きく逸脱するデータが存在し，このように実データには局所的に大きく変動する可能性があり，局所的な変動が見落としにつながる可能性もある．

本研究の目的は，全てのデータを捉えることではなく，見落としのリスク，すなわち情報の不足による推定分散を適切にモデル化することである．階層ベイズモデルにより，より適切に推定誤差評価が可能となる可能性を確認したが，さらにモデルを改善する必要がある．

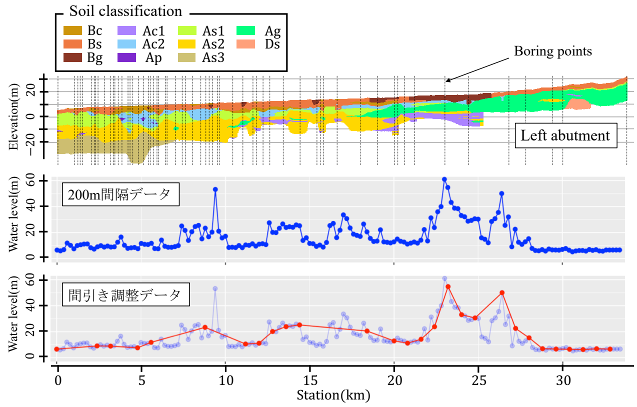

図 2　本解析に用いるデータ

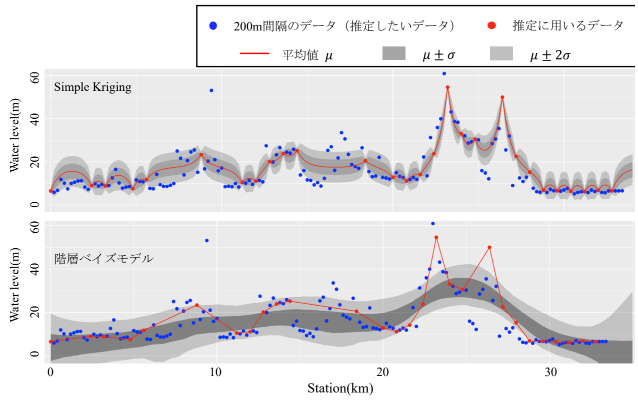

図 3　各モデリングによる解析結果

4. 結論と今後の課題

今後は，過去の中小規模の洪水履歴情報（漏水や噴砂などの情報）や治水地形の情報を状態空間の提案式に効率良く取り入れたモデルの開発や，ガウス過程回帰モデル（機械学習）の導入を考えている．さらに最適な地盤調査位置の選択など，合理的な意思決定に繋がる枠組みの構築も今後の課題である．

参考文献

1) Timo SCHWECKENDIEK.: On reducing piping uncertainties a Bayesian decision approach. TU Delft, 2014.
2) 松浦健太郎：StanとRでベイズ統計モデリング，共立出版, 2016.
3) 久保拓弥：データ解析のための統計モデリング入門 – 一般化線形モデル・階層ベイズモデル・MCMC，岩波出版，2012.
4) 伊庭幸人，久保拓也，丹後俊郎，樋口知之，持橋大地，田邉國士：ベイズモデリングの世界，岩波書店,
5) 大竹雄，本城勇介：地盤パラメータ局所平均の空間的ばらつきと統計的推定誤差の簡易評価理論，土木学会論文集 C(地圏工学), Vol. 68, No.1, pp.41-55, 2012.