

# 軌道条件が通り変位軸力推定法に及ぼす影響

新潟大学大学院自然科学研究科	学生員	佐藤拓郎
新潟大学工学部	正会員	阿部 和久
東日本旅客鉄道 (株)	正会員	小松 佳弘
新潟大学工学部	正会員	紅露 一寛

## 1 はじめに

鉄道軌道のロングレール化は、乗り心地の改善や、周辺環境への振動・騒音の低減、保守作業の省力化などに有効となるなど、多くの利点を有するため、広く導入が進められている。しかし、ロングレールは長い区間に亘ってまくらぎで拘束されることで、著大な温度軸力が作用するため、座屈や破断の危険性を内在しており、座屈の防止策として、バラスト道床による軌道の変形抑制などの手段が講じられている。そのため、軌道の横方向変位に対する道床の抵抗力である道床横抵抗力は、軸力とともに維持管理上重要な指標となっている。現在、軸力はレール温度とひずみゲージ等で測られた伸縮量から間接的に求められている。また、道床横抵抗力は軌きょうに荷重を加えて、その移動量を測定することで評価している。そのいずれの方法も特定箇所での測定となるため、軌道全区間において測定すると膨大な時間と労力が必要となり、現実的でない。一方、本研究では、在来線の営業車両に搭載された検測装置による通り変位の計測データを活用した高頻度軸力測定法の開発を試みている<sup>1)</sup>。これにより、理論モデルを対象とする限り、測定データにノイズが含まれていても粒子フィルタによるノイズ除去により通り変位からレール軸力と道床横抵抗力とがある程度推定可能になっている。しかし、推定法の基本となる数理モデルと実際の軌道とは相違点が存在する。例えば、理論では道床横抵抗力は一樣な連続分布モデルで、仮定している。一方、実際の軌道条件は、まくらぎを介して離散的に作用し、剛性も一樣ではない。また、理論ではレールを Euler ばりによりモデル化しており、せん断たわみの影響を考慮していない。そこで本研究では、実際の軌道に近い数値モデルで求めた通り変位を対象に、粒子フィルタに基づく本推定法を適用し、その適用可能性について検討する。

## 2 レール軸力推定法の概要

レールは締結装置を介してまくらぎに接合されているので、レール変位とまくらぎ変位とは差異が生じる。また、左右レールは異なる初期通り変位を有するので、軸力作用下の弾性たわみも完全には一致しない。そのため、締結部

からレールに作用する力も左右レールで異なる。したがって、左右いずれか一方の作用力がわかっていても、道床横抵抗力を与えず、それらの合力を評価する必要がある。

締結部に作用する力は、レールとまくらぎとの相対変位により与えられる。すると、レールのつり合い式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} EIw_L'''' + N(w_L'' + w_{L0}'') + k_r(w_L - w_s) &= 0, \\ EIw_R'''' + N(w_R'' + w_{R0}'') + k_r(w_R - w_s) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $E$  はレールのヤング率、 $I$  はレール弱軸回りの断面二次モーメント、 $N$  は軸力 (圧縮を正)、 $w_L, w_R$  は左右レールの弾性たわみ、 $w_{L0}, w_{R0}$  は初期通り変位、 $w_s$  はまくらぎ変位、 $k_r$  は締結部の横剛性である。また、 $( )'$  は軌道長手方向座標  $x$  に関する微分である。

まくらぎのつり合い式は次式で与えられる。

$$k_s w_s = k_r (w_R + w_L - 2w_s) \quad (2)$$

ここで、 $k_s$  は道床横剛性である。

式 (2) を  $w_s$  について解くと次式を得る。

$$w_s = \frac{k_r}{2k_r + k_s} (w_R + w_L) \quad (3)$$

式 (3) を式 (1) に代入して  $w_s$  を消去すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} EIw_L'''' + N(w_L'' + w_{L0}'') + k_r w_L \\ - \frac{k_r^2}{2k_r + k_s} (w_R + w_L) &= 0, \\ EIw_R'''' + N(w_R'' + w_{R0}'') + k_r w_R \\ - \frac{k_r^2}{2k_r + k_s} (w_R + w_L) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) 両式の和をとると次式を得る。

$$\begin{aligned} EI(w_{LR}'''' + \Delta w_{LR}'''' + (N + \Delta N)(w_{LR}'' \\ + \Delta w_{LR}'' + w_{LR0}'') + \tilde{k}_T (w_{LR} + \Delta w_{LR})) &= 0, \\ w_{LR} := w_L + w_R, \quad w_{LR0} := w_{L0} + w_{R0}, \\ \tilde{k}_T := k_r - \frac{2k_r^2}{2k_r + k_s} \end{aligned} \quad (5)$$

一方、軸力が  $N + \Delta N$  であるときのつり合い式は、たわみ増分  $\Delta w$  を用い次式で与えられる。

$$\begin{aligned} EI(w_{LR}'''' + \Delta w_{LR}'''' + (N + \Delta N)(w_{LR}'' \\ + \Delta w_{LR}'' + w_{LR0}'') + \tilde{k}_T (w_{LR} + \Delta w_{LR})) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) から式 (5) 第 1 式を引くと次式を得る。

$$\begin{aligned} EI\Delta w_{LR}'''' + (N + \Delta N)\Delta w_{LR}'' \\ + \Delta N(w_{LR}'' + w_{LR0}'') + \tilde{k}_T \Delta w_{LR} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

さらに式 (7) の  $x$  に関する Fourier 変換より次式を得る.

$$k^2 \frac{\hat{w}_{LR} + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} \{EIk^4 - (N + \Delta N)k^2 + \tilde{k}_T\} \quad (8)$$

ここで  $k$  は波数,  $(\hat{\cdot})$  はレール長手方向に関する Fourier 変換を意味する.

測定データから式 (8) 左辺を求めることができる. 一方, 右辺より, これは次式のように波数  $k$  の 4 次関数で与えられる.

$$k^2 \frac{\hat{w}_{LR} + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} := f(k) = ak^4 - bk^2 + c \quad (9)$$

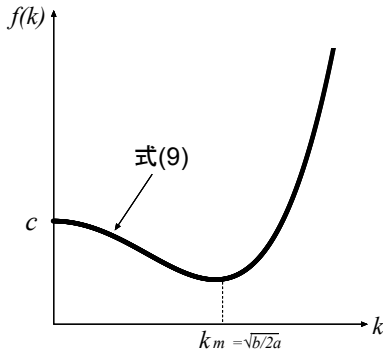


図-1 式 (9) の 4 次関数とその最小値を与える波数  $k_m$

式 (9) 右辺の未知係数  $a, b, c$  を最小二乗法等により決定し, 関数  $f$  の最小値を与える波数  $k_m$  を求めると, 次式を得る.

$$k_m = \sqrt{\frac{N + \Delta N}{2EI}} = \sqrt{\frac{b}{2a}} \quad (10)$$

式 (10) の第 2, 3 式より得られる次式から絶対軸力  $N + \Delta N$  を求めることができる.

$$N + \Delta N = EI \frac{b}{a} \quad (11)$$

### 3 粒子フィルタによる推定の検討

測定データにはノイズが含まれており, 本推定法ではその影響を除去する必要がある<sup>1)</sup>. よって未知量推定においては, これらを確率変数としてとらえ, 適切に処理することが望まれる. 本研究ではベイズ推定手法の一つである粒子フィルタ<sup>2)</sup>の適用について検討する.

#### 3.1 式 (8) の修正

ある時刻における通り変位を  $w_{LR1}$ , その際に作用している軸力を  $N_1$  とする. また, 時間経過後における通り変位を  $w_{LR2}$ , その時の軸力を  $N_2$  とすると, 式 (8) と同様に次式が成り立つ.

$$k^2 \frac{\hat{w}_{LR1} + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} \{EIk^4 - N_2 k^2 + k_T\} \quad (12)$$

$$k^2 \frac{\hat{w}_{LR2} + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} \{EIk^4 - N_1 k^2 + k_T\} \quad (13)$$

ここで  $\Delta N = N_2 - N_1$  である.

測定データは列車が同一軌道を複数回走行して得られる時系列データ  $w_{LR1} + w_{LR0}, w_{LR2} + w_{LR0}$  を計測としている. よってこの 2 つのデータを同等に活用する目的で, 軸力推定に用いる式を, 式 (12), (13) における両式の総和平均より得られる次式に修正する.

$$k^2 \frac{\hat{w}_{LR1} + \hat{w}_{LR2} + 2\hat{w}_{LR0}}{2\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} [EIk^4 - 0.5(N_1 + N_2)k^2 + k_T] \quad (14)$$

#### 3.2 軸力推定問題の設定

本軸力推定問題を次式により設定する.

$$X_t = X_{t-1}, \quad (15)$$

$$y_t = G_t(X_t) + \varepsilon_t$$

ここで,  $X_t$  は推定すべき未知量を成分とするベクトルであり,  $\varepsilon_t$  は通り変位測定データにおけるノイズによる当該 Fourier スペクトル比への影響項である. 2 つの連続測定データに基づく推定を対象とする場合,  $X_t$  は次式で構成される.

$$X_t = \{N_1, N_2, k_T\} \quad (16)$$

$y_t$  は通り変位の測定データの Fourier 変換の比 (スペクトル比) であり, 関数  $G_t(X_t)$  は式 (14) の右辺で与えられるもので, 未知量である軸力  $N_i (i = 1, 2)$ , 道床横剛性  $k_T$  により次式により表わすことができる.

$$G_t(X_t) = \frac{1}{\Delta N} [EIk^4 - 0.5(N_1 + N_2)k^2 + k_T] \quad (17)$$

粒子フィルタでは, まず推定値の候補となりうるような粒子と呼ばれる, 様々な  $X_0 \equiv X_t$  を生成する. その後, 各粒子毎に式 (14) の右辺を設定し, それと測定データより得られた同式左辺との差異から前者の尤度を評価する. 続いて, これに比例するように各粒子を再配分する. これにより統計的に未知量推定が可能となる.

### 4 数値モデルによる検証

現実の軌道に近いモデルに対する粒子フィルタに基づく本推定法の適用可能性を検討するために軌道モデルによる数値実験を実施した.

#### 4.1 数値モデル

50kgN レールを想定し軌道長は 120m とした. 左右レールは 0.6m 間隔にまくらぎによって離散支持された両端固定の微小変位 Timoshenko 梁としてモデル化した (図 2). なお図 3 に示すように, まくらぎと道床間はばねでつながれ, レールまくらぎ間は剛結されているものとする. 初期通り変位は所定の距離相関長を有し, 期待値ゼロ, 標準偏差 1cm のガウス分布により設定した. 全通り変位に  $\sigma_\varepsilon = 0.5\text{mm}$

のホワイトノイズを与え、粒子フィルタを適用し軸力推定を行った。

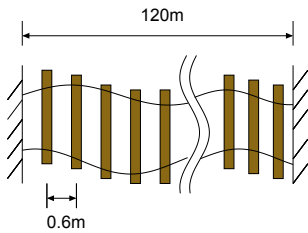


図-2 軌道モデル

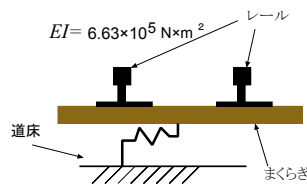


図-3 軌道モデル (断面)

#### 4.1.1 数値モデルの道床横抵抗力、道床横剛性の設定

道床横抵抗力  $f$  は、実際の軌道では一般に図 4 示すような非線形性を有している。数値モデルの道床横抵抗力は次式により設定した<sup>3)</sup>。

$$f = f_0 \frac{w_s}{a + |w_s|} \quad (18)$$

ここで、 $f_0$  は最終道床横抵抗力、 $a$  は  $f = f_0/2$  を与える時のまくらぎ変位である。

また、実際の軌道の道床横剛性にはばらつきが存在する。そこで、軌道モデルの道床横剛性に変動を与え、 $f$  を次式により設定し直した。

$$f = \frac{w_s}{a + |w_s|} f_0 (1 + \delta \sin \frac{2\pi}{\lambda} x) \quad (19)$$

ここで、 $\delta$  は変動を与える  $\sin$  波形の平均値からの振幅、 $\lambda$  は波長である。なお  $a=1(\text{mm})$ 、 $\delta=0.5$ 、 $\lambda=5(\text{m})$  で設定している。

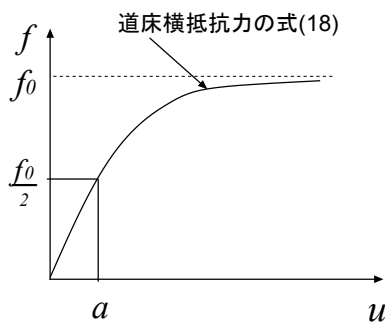


図-4 変位-道床横抵抗力の関係

#### 4.1.2 軸力設定

2つの軸力  $N_1, N_2$  の組み合わせとして、表 1 の4つのケースを対象とした。Case1~Case3 は、 $N_2 = 2.0 \times 10^5 \text{N}$  のまま、 $N_1$  を  $0.5 \sim 1.5 \times 10^5 \text{N}$  として、異なる軸力差を設定したものである。一方、Case4 は、 $N_1, N_2 = 0.5, 3.0 \times 10^5 \text{N}$  として、軸力差が比較的大きいケースとなっている。また、

道床横抵抗力が非線形性を有するため  $5.0 \times 10^4 \text{N}$  の軸力増分の下、増分解析を行った。粒子フィルタにおける軸力は、次式により設定した。

$$N_i = R \cdot N_{max} \quad (20)$$

なお  $N_{max}$  は推定軸力範囲の上限値、 $R$  は  $[0,1]$  の区間で生成した乱数である。なお5回の粒子フィルタ推定結果の平均値をもって最終推定値とした。

表-1 解析条件

条件	$N_1(\text{N})$	$N_2(\text{N})$	軸力増分 (N)	増分回数 (回)
Case1	$5.0 \times 10^4$	$2.0 \times 10^5$	$5.0 \times 10^4$	4
Case2	$1.0 \times 10^5$	$2.0 \times 10^5$	$5.0 \times 10^4$	4
Case3	$1.5 \times 10^5$	$2.0 \times 10^5$	$5.0 \times 10^4$	4
Case4	$5.0 \times 10^4$	$3.0 \times 10^5$	$5.0 \times 10^4$	6

#### 4.2 解析結果

各ケースにおける推定結果を図 5~図 12 に示す。なお、図は軸力推定範囲  $N_{max}$  と推定軸力  $N_1, N_2$ 、および相対軸力  $\Delta N$  との関係を示したものである。図中の水平な点線は正解値を示している。Case1~Case3 では、 $N_{max}$  の値を  $N_2$  の正解値である  $2.0 \times 10^5 \text{N}$  から  $4.0 \times 10^5 \text{N}$  までの範囲で変化させている。一方 Case4 では、 $N_2$  の正解値  $3.0 \times 10^5 \text{N}$  から  $5.0 \times 10^5 \text{N}$  までの範囲で与えた。

いずれのケースにおいても、 $N_{max}$  の増加に伴い推定軸力がほぼ線形的に増加している様子が窺える。また、設定した軸力推定範囲  $[0, N_{max}]$  において、平均軸力  $(N_1 + N_2)/2$  が概ね中央値を示している。これは、粒子フィルタによる推定において、絶対軸力の推定精度 (感度) が必ずしも十分に確保されておらず、事後確率分布が明確なピークを有していないことによるものと考えられる。

これに対して、相対軸力  $\Delta N$  に関しては、正解値より一様に大きめではあるものの、 $N_{max}$  によらず概ね一定値を取り、比較的良好な推定結果が得られている。

以上のことより、粒子フィルタを援用した本軸力推定においては、絶対軸力の推定にはさらなる工夫を要するものの、相対軸力については比較的良好な精度が得られていることが確認できる。

また、解析モデルにおいては、レールを Timoshenko ばりモデルで表し、まくらぎ離散支持や道床横抵抗力のバラツキおよび非線形性を考慮しており、本推定法において前提としている軌道モデルとは異なったものとなっている。これらが式 (9) のスペクトル比に対して及ぼす影響については、文献<sup>4)</sup>において定性的に検討を行っている。その結果、道床横抵抗力における非線形性がスペクトル比を全体

に低下させる効果を有するものの、軸力推定へは影響しないものと予想された。本解析では、これらの影響の定量的検討を行ったが、上記のとおりこれらの事項は軸力推定にはほとんど影響しないとの結果を得た。なお、絶対軸力推定に関する課題は、文献<sup>1)</sup>でも認識されており、軌道モデルの近似とは直接関係しないものと考えられる。

採用した。数値シミュレーションにより得られた通り変位データを対象に、粒子フィルタを援用した軸力推定法を適用し、推定精度について検討した。その結果、絶対軸力の推定にはさらなる改善・工夫が必要ではあるものの、相対軸力については比較的良好な精度で推定可能であることがわかった。

なお本研究では、軸力を所定の値まで一様に増加させ、その過程での軸力推定を試みた。今後は、昼夜のレール温度変化に伴う軸力の変動履歴を考慮した、より現実の軌道に即した条件下での適用についても検討するつもりである。

**謝辞** 本研究は科研費(17K06529)の助成を受けたものである。ここに記して謝意を表す。

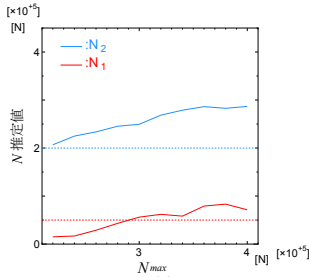


図-5 絶対軸力 (Case1)

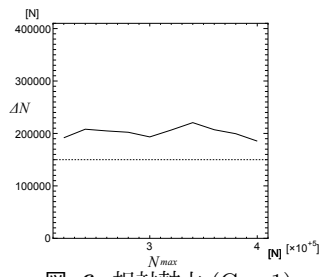


図-6 相対軸力 (Case1)

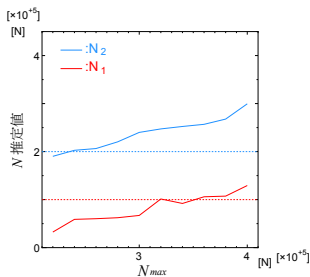


図-7 絶対軸力 (Case2)

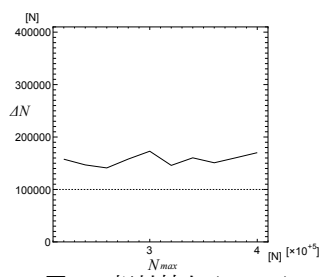


図-8 相対軸力 (Case2)

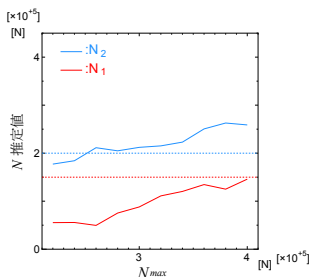


図-9 絶対軸力 (Case3)

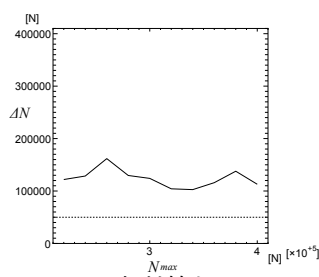


図-10 相対軸力 (Case3)

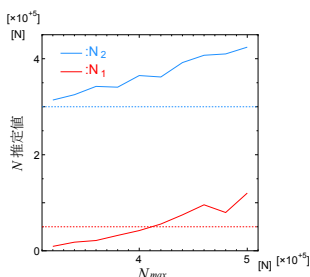


図-11 絶対軸力 (Case4)

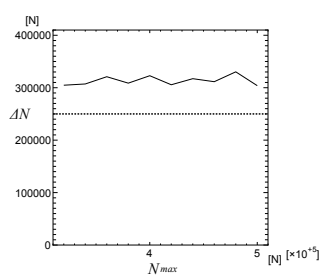


図-12 相対軸力 (Case4)

**参考文献**

- 1) 阿部和久, 千葉颯兵, 佐藤拓郎, 小松佳弘, 紅露一寛: 通り変位測定データを用いた軌道力学状態推定に関する基礎的検討, 鉄道工学シンポジウム論文集, 第 22 号,107-114,2018
- 2) 樋口知之, 上野玄太, 中野慎也, 中村和幸, 吉田亮: データ同化入門, 朝倉書店, 2010
- 3) 宮井 徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術研究報告, No.1271, 1984.
- 4) 佐藤拓郎, 阿部和久, 千葉颯兵, 小松佳弘, 紅露一寛, 軌道状態が通り変位軸力推定法に及ぼす影響, 土木学会 第 73 回年次学術講演会, No.6-863,2018

**5 おわりに**

本研究では実軌道に近い数値モデルを用いて軸力推定の数値実験を行った。具体的には、レールを Timoshenko ばりモデルで表し、まくらぎによる離散支持条件や道床横抵抗力のバラツキおよび非線形性を考慮した軌道モデルを