吊上げ式レール軸力測定法の省力化に関する
解析的検討

新潟大学自然科学研究科　学生員　遠藤一彰
新潟大学工学部　正会員　阿部和久
新潟大学工学部　正会員　紅露一寛

1　はじめに

ロングレールはまくらぎ締結により, その両端の可動区間を除いて伸縮が拘束されるため, 不動区間には温度変化に伴い温度応力が発生する. 発生する軸力が過大となると破断や座屈を引き起こす危険性を有するため, 軌道保守上その把握が重要となる.

軌道管理のためにはレール軸力の絶対量を知る必要があるが, 現在は「吊り上げ式レール軸力測定法[1)] [2)]」が軸力の絶対量を測定可能な手法として唯一実用化されている. 海外で考案・実用化された当該測定法は VERSE と呼ばれ, これは 30m にわたりレール締結を解放し, 解放端から 5m の位置にブロックを挿入し, レールを支持した上でレール中央部を吊り上げ, その時の吊上げ荷重とたわみとの関係から, たわみ剛性の軸力依存性を利用して軸力を評価する手法である (**図-1**).

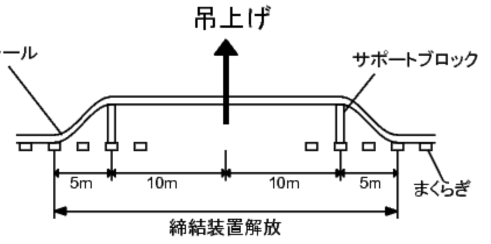
我国で VERSE を導入する場合, 30m の解放区間長が作業制限に抵触するため適用ができない. 文献 3) によりレール解放区間長を 20m まで短縮したうえで, 軸力測定精度を保ったまま VERSE が適用できることが明らかになった.

また, 文献 4) ではさらなる短縮を可能とする測定法について検討した. その結果, 解放区間を 10m 程度まで短縮可能であるとの結論を得た. ただしこの方法では, 解放区間外の軌道条件が軸力推定に与える影響を排除するために, 吊り上げ位置と解放端近傍の二箇所における曲げモーメントそ測定を必要としていた. これは, 例えばひずみゲージの貼付を伴うため, さらなる省力化には測定法の改善が必要であった.

なお, 近年の計測技術を利用すれば, レールのたわみ形状を高精度かつ高密度に測定可能であると考えられる. そこで本研究では, 吊上げ区間におけるレールたわみ形状の測定を前提として, 曲げモーメントの測定を必要とせず, さらなる締結解放区間の短縮を可能とする, 新たな吊り上げ式レール軸力測定法について検討する.

2　文献 3) の軸力測定法

VERSE は, 緩解部以外の軌道状態（締結剛性, まくらぎ重量, 道床剛性など）の影響を排除するために最低 20m の締結解放を必要とするが, 20m より短く設定すると所定の精度確保が困難となる. 文献 4) ではこの問題点を解決し得る方法として, 次の手法を提案した.



図–1　VERSE による軸力測定の概要

図-2 に示すような状態を考える. ある区間 L で締結装置を解放し, 中央部を力 P で吊り上げる. 対称性から**図-2** では右半分のみ示している. 解放区間の吊上げ位置 A 点および左端付近 B 点での曲げモーメントを M_A および M_B, AB 間距離を l, AB 点間の相対吊上げ量を y_{AB}, レールの単位長さ当りの質量を m, 重力加速度を g とする. 点 B におけるモーメントのつり合い式をとり, 引張軸力 N について解くと次式が得られる.

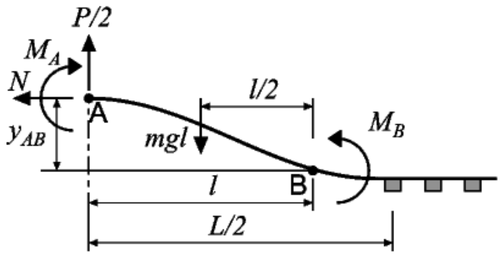
$$N = \frac{1}{y_{AB}}\left(M_A - M_B + \frac{Pl}{2} - \frac{mgl^2}{2}\right) \qquad (1)$$

式 (1) において, 吊上げ力 P, 曲げモーメント M_A, M_B, および相対たわみ量 y_{AB} は測定データとして与えられる. よって, 式 (1) 右辺に軌道状態に関する不確定量は存在せず, 原理的には緩解長に制限はない. そのため, 解放区間長の短縮が期待される.

レールは 50kgN レール及び 60kg レール, 作用する引張軸力は最大 500kN を想定し, 吊上げによるレールの塑性変形を考慮した上で数値解析を行った結果, 各軸力, レールのもと, 相対たわみ y_{AB} を 10cm とした場合には 13.2m 程度, 5cm とした場合には 8.4m まで締結装置解放区間を短縮できることが分かった.

3　たわみ形状に基づく軸力推定法の提案

文献 4) による軸力測定法では, 2 箇所の曲げモーメントを測定する必要があった. 例えば曲げモーメントをひずみゲージにより算出する方法では, ゲージの貼付作業が軸力測定の効率を下げる要因となることが考えられる. そこで



図–2 提案測定法の概要図

本研究では, 以下に示す様に, 曲げモーメントを測定せずにたわみ形状を測定することで軸力を推定する方法について検討する.

3.1 軸力推定法

図-3 のような状態を考える. 吊り上げ位置から水平距離 x における曲げモーメント M_x は, y_A を吊り上げ位置でのたわみ量とすると次式で与えられる.

$$M_x = M_A + \frac{P}{2}x - \frac{mg}{2}x^2 - N(y_A - y(x)) \tag{2}$$

ここで**図-3** のようにたわみ y を上向きにとると, y と M_x には, 曲げ剛性を EI として次の関係が成り立つ.

$$y''(x) = \frac{M_x}{EI} \tag{3}$$

式 (2) に (3) を代入し, $z = y(x) - y_A$, $\overline{N} = N/EI$, $\overline{P} = P/EI$, $\overline{M_A} = M_A/EI$, $\overline{mg} = mg/EI$ とおくと, 次式を得る.

$$z'' = \overline{N}z + \frac{\overline{P}}{2}x - \frac{\overline{mg}}{2}x^2 + \overline{M_A} \tag{4}$$

z の 2 階微分方程式 (4) の一般解は, 特解 z_p と同次解 z_h の和で与えられる.

特解 z_p について, $a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ を定数として次式を仮定する.

$$z_p = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{5}$$

式 (5) を式 (4) に代入して, 係数 a_i を求めると, 次式を得る.

$$z_p = \frac{\overline{mg}}{2\overline{N}}x^2 - \frac{\overline{P}}{2\overline{N}}x + \left(\frac{\overline{mg}}{\overline{N}^2} - \frac{\overline{M_A}}{\overline{N}}\right) \tag{6}$$

一方で, 同次解 z_h は次式を満たす.

$$z_h'' = \overline{N}z_h \tag{7}$$

式 (7) の一般解は, A,B を定数として次式で与えられる.

$$z_h = A\cosh\sqrt{\overline{N}}x + B\sinh\sqrt{\overline{N}}x \tag{8}$$

式 (6),(8) より, z の一般解は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} z =& A\cosh\sqrt{\overline{N}}x + B\sinh\sqrt{\overline{N}}x \\ &+ \frac{\overline{w}}{2\overline{N}}x^2 - \frac{\overline{P}}{2\overline{N}}x + \left(\frac{\overline{w}}{\overline{N}^2} - \frac{\overline{M_A}}{\overline{N}}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

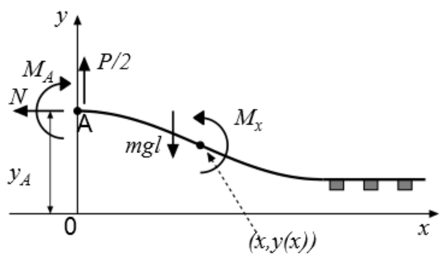
境界条件として, $z(0) = z'(0) = 0$ を課し, A, B を求めると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} z =& \left(\frac{\overline{mg}}{\overline{N}^2} - \frac{\overline{M_A}}{\overline{N}}\right)(1 - \cosh\sqrt{\overline{N}}x) \\ &+ \frac{\overline{mg}}{2\overline{N}}x^2 + \frac{\overline{P}}{2\overline{N}}\left(\frac{1}{\sqrt{\overline{N}}}\sinh\sqrt{\overline{N}}x - x\right) \end{aligned} \tag{10}$$

レールに沿ったたわみの測定データ z_i より未知量 M_A, N を求めることを考える. なお, z_i には誤差が含まれているので, 次の誤差二乗和 e を定義する.

$$e = \sum_i \{z(x_i) - z_i\}^2 \tag{11}$$

この誤差二乗和 e を最小にする M_A, N を準ニュートン法により求める.



図–3 検討手法の概要

3.2 式 (10) によるたわみ形状表現の妥当性

式 (10) では, レールのせん断たわみや 3 次元的変形が考慮されていない. そこで, レールを吊り上げた際の軌道の形状などの状態を, 文献 4) と同様の 3 次元モデルにより解析した. その結果に基づき, 式 (10) が適切にたわみ形状を表現しているかについて確認する.

文献 4) で用いた 3 次元軌きょうモデルについて述べる. 有道床軌道を対象とし, レールおよびまくらぎは Timoshenko ばり要素 [5] で離散化し, さらに振り変形を考慮した. レールについては, たわみ剛性に対して軸力の影響を考慮して定式化した [6].

レール・まくらぎ間締結の剛性は, 相対変位と回転に関する 3 次元成分をバネ及び回転ばねにより表現した. まくらぎ・道床間については, 相対変位に関するバネを 3 成分設定し, 回転についてはまくらぎ長手方向軸回りについてのみ考慮して回転ばねを導入した. (**図-4**)

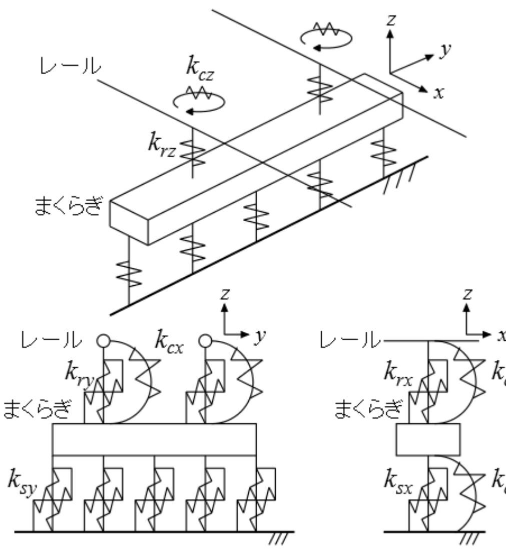
吊り上げ過程におけるレール・まくらぎ間剛性については, 軌道パッドおよび締結装置へのレールの接触状態の変化を, 吊上げ力増加ステップごとに逐次更新するものとして, 文献 7) を参考に設定した. 締結装置解放区間については軌道パッドとの接触のみ考慮し, レールが軌道パッドから離れた時点でレールに浮き上がりが生じるものとした.

表–1 たわみ形状の比較

	相対たわみ y(m)	
x(m)	モデル式 (10)	3 次元モデル
0.6	-0.00205	-0.00206
1.2	-0.00756	-0.00755
1.8	-0.01566	-0.0156
2.4	-0.02552	-0.02538
3.0	-0.03636	-0.03612
3.6	-0.04745	-0.04706
4.2	-0.05805	-0.05749

まくらぎ・バラスト道床間のバネについては, 鉛直方向接触力が圧縮時のみ作用するように設定し, 上述のとおりまくらぎの浮き上がりを考慮した.

解析条件として, レールは 50kgN レール, 軸力は $N = 200$(kN), 解放区間長は $L = 8.4$(m), 吊上げ力は $P = 37600$(N) と与え, 3 次元軌きょうモデルおよび式 (10) におけるたわみ形状の比較を行った. その結果を**表-1** に示す. **表-1** から分かる通り, 良好な精度で式 (10) によりたわみ形状が再現されていることが確認された.



図–4 3 次元軌道モデル

4 準ニュートン法

4.1 準ニュートン法による目的関数 e の最小点探索

変数ベクトル $\boldsymbol{z}$ の第 k 近似を $\boldsymbol{z}_k$ として, その近傍で e を Taylor 展開すると次式を得る.

$$e(\boldsymbol{z}_k + \Delta\boldsymbol{z}) = e(\boldsymbol{z}_k) + \nabla e(\boldsymbol{z}_k)\Delta\boldsymbol{z} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{H}_k\Delta\boldsymbol{z} \quad (12)$$

ここで $\boldsymbol{H}_k$ は e の $\boldsymbol{z}_k$ におけるヘッセ行列である. 最小点の条件は $\partial e/\partial\boldsymbol{z} = 0$ であるので, 式 (1) より次の近似を得る.

$$\Delta\boldsymbol{z} = -[\boldsymbol{H}_k]^{-1}\nabla e(\boldsymbol{z}_k) \quad (13)$$

式 (8) によって $\boldsymbol{z}$ の修正を求め, 目的関数 e の最小点探索を行う. 本研究では, $[\boldsymbol{H}_k]^{-1}$ を BFGS 法により効率的に求めるものとし, さらに $\Delta\boldsymbol{z}$ を適切に設定するために Armijo のルール [8] を設定した.

4.2 BFGS の手順

BFGS による, 目的関数 e の最小点探索のフローを示す.

STEP1：変数ベクトルの初期値 $\boldsymbol{z}_0$, 及び初期のヘッセ行列 $\boldsymbol{H}_0$ を設定し, $k = 0$ とおく. なお, ここでは $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{I}$ とした.

STEP2：修正方向ベクトル $\boldsymbol{d}_k$ を次式により求める.

$$\boldsymbol{d}_k = -[\boldsymbol{H}_{k+1}]^{-1}\nabla e_k \quad (14)$$

STEP3：次式を満たす最小の $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{s}_k$ を求める. ここで, $\boldsymbol{s}_k = \beta^m\boldsymbol{d}_k$ である.

$$e(\boldsymbol{z}) \leq e_k - \alpha\beta^m(\nabla e_k^t\boldsymbol{d}_k) \quad (15)$$

ここで, α, β は Armijo のパラメータで, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ であり, m は 1 以上の自然数である.

STEP4：$k+1$ でのヘッセ行列の逆行列を次式により計算する.

$$[\boldsymbol{H}_{k+1}]^{-1} = [\boldsymbol{H}_k]^{-1} - \frac{([\boldsymbol{H}]_k^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}_k)\overline{\boldsymbol{s}}_k^T + \overline{\boldsymbol{s}}_k([\boldsymbol{H}_k]^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}_k)^T}{\overline{\boldsymbol{s}}_k^T\overline{\boldsymbol{y}}_k} + \left(\frac{|\boldsymbol{s}_k|}{|\boldsymbol{y}_k|} + \frac{\overline{\boldsymbol{y}}_k^T[\boldsymbol{H}_k]^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}_k}{\overline{\boldsymbol{s}}_k^T\overline{\boldsymbol{y}}_k}\right)\frac{\overline{\boldsymbol{s}}_k\overline{\boldsymbol{s}}_k^T}{\overline{\boldsymbol{s}}_k^T\overline{\boldsymbol{y}}_k} \quad (16)$$

ここで, $\boldsymbol{z}_{k+1} = \boldsymbol{z}$, $\overline{\boldsymbol{s}}_k = \boldsymbol{s}_k/|\boldsymbol{s}_k|$, $\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}_k/|\boldsymbol{y}_k|$, $\boldsymbol{y}_k = \nabla e_{k+1} - \nabla e_k$ である.

STEP5：$|\boldsymbol{s}_k|$ が収束すれば終了し, 収束していなければ $k := k+1$ として STEP2 へ戻る.

4.3 Armijo のルール [8]

準ニュートン法をはじめとする降下法による最小点探索において, 方向ベクトル $\boldsymbol{d}_k$ の修正ステップ数 k を減らし効率化・高速化を図る手法として, 一般に Armojo のルールが知られている. 本研究では, **4.2** の STEP3 において Armijo ルールを適用した. Armijo パラメータは, 文献 8) を参考に $\alpha = 0.0001$, $\beta = 0.5$ と設定した.

5 解析結果に基づく検討

本項では上述の手法による軸力の評価が適切になされているかについて検討する.

表–2 軸力推定結果

	Δx					
	10(cm)		1(cm)		0.5(cm)	
L(m)	n	N	n	N	n	N
8.4	43	176.7	421	182.3	841	213.7
7.2	37	186.7	361	187.9	721	192.6
6.0	31	204.4	301	205.3	601	203.1
4.8	25	217.5	241	223.7	481	221.0
3.6	19	251.2	181	257.5	361	266.4

レールは 50kgN レールとし, 引張軸力 N=200kN と設定した. 観測データ z_i の測定間隔 Δx は 10cm, 1cm, 0.5cm と設定した. 解放区間長 L は, 文献 4) で検討した最小の 8.4m から, 1.2m 間隔で短縮した. 測定誤差はホワイトノイズで与えた. ここで, たわみの測定精度は測定方法により異なるが, 1mm の精度で測定された場合を仮定し, 標準偏差を 1mm とした.

解析結果を**表-2** に示す. n は測定データ数, N は推定軸力 (kN) である. **表-2** から, L=4.8m までは概ね良好な精度で軸力推定がなされており, L=3.6m 以下で誤差が大きくなっている. このことから, 解放区間長を 4.8m 程度まで短縮可能であると期待される.

しかし, **表-3** に示す通り, 初期変数ベクトル $\boldsymbol{z}_0$ の値を最小解より幾分遠方にとると, 最小解に収束せず N の推定が適切に行えないことが分かった. 関数値 e の等高線図 (**図-5**) から分かる通り, M_A 方向の勾配に比べ, N 方向の勾配が極端に緩やかであることが確認できる. このことから, 軸力 N に対する収束性が悪いことが分かる.

以上より, 局所解に収束した場合の対策を考える必要はあるものの, $\boldsymbol{z}_0$ を真値の近傍にとれば適切な解に収束しており, 解放区間長が 4.8m 程度あれば, 良好な精度で本手法による軸力推定を行うことが期待できることが分かった.

6 おわりに

吊り上げ式レール軸力測定法におけるレールの締結装置解放区間をどの程度短縮できるかを検討した. 具体的には, レールに沿ってたわみ形状を測定し, 準ニュートン法 (BFGS 法) によりカーブフィッティングを行うことで軸力を推定する手法について検討した.

その結果, 軸力 N が適切な解に収束すれば, 解放区間長を 4.8m 程度まで短縮可能であると期待できることが分かった. ただし, 軸力 N の収束性が悪く, 実用化には局所解への対策を講じる必要がある.

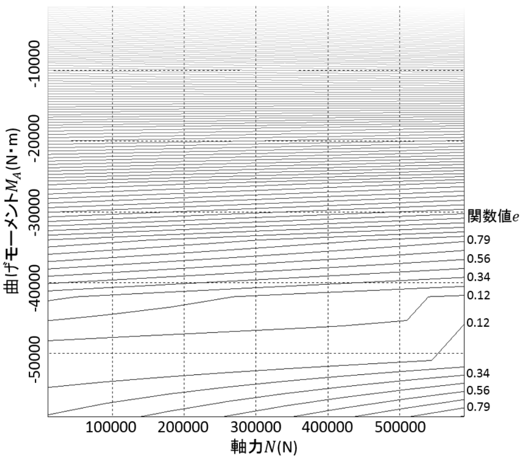
表–3 初期値と収束値の比較

case1

	M_A(N・m)	N(N)
真値	-49000	200000
入力値	-50000	250000
推定値	-49500	205310

case2

	M_A	N
真値	-49000	200000
入力値	-20000	50000
推定値	-51497	93510



図–5 誤差二乗和 e の分布

参考文献

1) van Tonder, J.P.A.: Determining the stress-free temperature of continuous welded rails (CWR), UIC-ERRI Interactive Conf., Paris, pp.1-6, 1998.

2) Lemon,C. and Gostling, R.J.: The non-destructive measurement of stress-free temperature in continuous welded rail, WCRR99, DS3-3, 1999.

3) 田中洋介, 阿部和久, 元好茂: 吊上げ式レール軸力測定法に関する解析的検討, 鉄道工学シンポジウム論文集, Vol.15, pp.112-119, 2011.

4) 遠藤一彰, 阿部和久, 紅露一寛: 吊上げ式レール軸力測定法の改善に関する一検討, 鉄道工学シンポジウム論文集, Vol.21, pp.75-81, 2017.

5) Nickel, R.E. & Secor, G.A.: Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *Int.J.Numer.Meth.Engng.*, Vol.5, pp.243-253, 1972.

6) 清水紗希, 阿部和久, 相川明, 紅露一寛: 3 次元はり要素を用いた軸力を受ける軌道系の波動伝播解析, 鉄道力学論文集, 14 号, pp.75-82, 2010.

7) 佐藤吉彦: 向上法によるスラブ軌道レール軸力の測定, 平成 14 年鉄道技術連合シンポジウム (J-Rail2002) 論文集, pp47-50, 2002.

8) Bonnans, J.F., et al. : Numerical Optimization (2nd Ed.), Capt.4 and 5, Springer, 2006.