地下鉄の軌道構造が防振特性に及ぼす影響

新潟大学自然科学研究科	学生員	山田高也
新潟大学工学部	正会員	阿部和久
新潟大学工学部	正会員	紅露一寛
日本工営 (株)	正会員	古田勝
日本工営 (株)		末原美智子

1　はじめに

列車走行による振動が周辺環境に及ぼす影響は重要な課題である．その中でも特に，軌道構造は振動特性と密接に関係するため，軌道構造を改善することにより，振動を大幅に低減できると考えられる．我が国においては具体的対策として防振まくらぎや，弾性まくらぎ，フローティング・スラブ等の軌道構造が採用されている．一方，国外では防振マット工法が採用されている．

本研究では，防振まくらぎと防振マット工法とを対象に振動低減効果について数値解析を通して調べ，その特性について検討する．

2　各種防振構造の概要

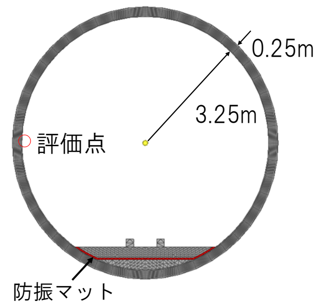
防振マット工法の概略を，**図-1** に示す．**図-1** のように軌道スラブとインバート間に低剛性の防振材が挿入された構造となっている．この防振材・軌道スラブ系の固有振動数を車両・軌道系の共振周波数より低く設定することにより振動低減を得ることができる．

一方，防振まくらぎ軌道とは，まくらぎを弾性材が敷設された防振箱に挿入したものである．この構造は，道床コンクリートへの負担が小さいため，耐用年数が比較的長く，既設軌道へも適用可能である．

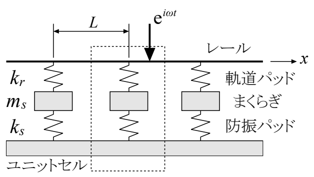
3　解析対象

本研究では，軌道系とトンネル・地盤系とに分離して解法を構成する．軌道系は，無限長レールとそれを間隔 L で離散支持しているまくらぎによりモデル化する．防振まくらぎ軌道の例を**図-2** に示す．単線軌道を想定し，連成系全体の対称性により，レール 1 本分を考える．レールは曲げ剛 EI，単位長さ当たり質量 ρA の Euler ばりで表す．まくらぎは質量 m_s(レール 1 本当たり) の質点で表す．また，レール・まくらぎ間の軌道パッド k_r の他に，防振パッド k_s をまくらぎ下に設置する．

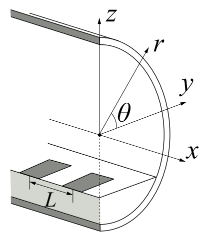
トンネル・地盤系を**図-3** に示す．トンネル部はコンクリート道床・インバート・覆工から構成されており，円形の外周を有し長手方向に一様な無限長弾性体として表現する．一方，地盤は一様無限動弾性場でモデル化する．トンネル・地盤境界は完全に接合されており，滑りや剥離は一切生じないものとする．また，解の記述にあたり，トンネル (軌道) 長手方向に x 座標を設定し，**図-3** に示す様に円形トンネル断面に関して直交座標系 (y, z) と極座標 (r, θ) を併用する．



図–1　トンネル断面と要素分割 (防振マット工法)



図–2　軌道のモデル化



図–3　トンネル・地盤のモデル化

4　解析手法

4.1　軌道系

図-2 の軌道系調和加振問題は次式で与えられる．

$$EIw'''' - \rho A\omega^2\tilde{w} = \delta(x - x_p) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j\delta(x - Lj) \quad (1)$$

ここで，w はレールたわみ，x_p は単位調和加振 $e^{i\omega t}$ の作用位置，F_j は j 番まくらぎからレールに作用する荷重振幅，δ はデルタ関数，$w'''' = d^4w/dx^4$ である．たわみ応答に対して，まくらぎ間隔 L に関する次の Floquet 変換[1)]を適用する．

$$\tilde{w}(\tilde{x}, \kappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(\tilde{x} + nL)e^{in\kappa L} \quad (2)$$

ここで，$\tilde{x}$ は軌道 1 ユニット $(-L/2, L/2)$ 内の座標，κ は Floquet 波数と呼ばれる波数の次元を持つ変数である．なお，Floquet 変換は $\tilde{x}$ と κ について次の周期性を持つ．

$$\tilde{w}(\tilde{x}+L,\kappa) = e^{-i\kappa L}\tilde{w}(\tilde{x},\kappa),$$
$$\tilde{w}(\tilde{x},\kappa+\frac{2\pi}{L}) = \tilde{w}(\tilde{x},\kappa) \tag{3}$$

$\tilde{w}$ は，式 (3) の周期条件の下，次の方程式をみたす．

$$EI\tilde{w}'''' - \rho A\omega^2\tilde{w} = \delta(\tilde{x}-x_p) - k_e\tilde{w}\delta(x) \tag{4}$$

ここで，Floquet 変換の下に定義されたまくらぎ・トンネル・地盤系の動的等価剛性 k_e を用いて，まくらぎ反力を $k_e\tilde{w}$ と表している．

式 (3) 第 1 式の周期条件をみたす様に，$\tilde{w}$ を以下の Fourier 級数展開により表現する．

$$\tilde{w} = \sum_n w_n(\kappa)e^{-iz_nx}, \quad z_n = \frac{2\pi n}{L}+\kappa \tag{5}$$

式 (4) をみたす様に w_n を決定し，式 (5) より，まくらぎ直上のレールたわみ $\tilde{w}(0) = \sum\tilde{w}_n$ を求める．

4.2 トンネル・地盤系

図-3 に示したトンネル・地盤連成系を，軌道同様にまくらぎ間隔 L に関して x 方向に Floquet 変換する．トンネル 1 ユニットにおける Floquet 変換 $\tilde{u}$ の構成に当り，トンネル長手方向 $\tilde{x}$ については軌道と同様に Fourier 級数展開する．これにより，当該問題はトンネル断面に関する準二次元問題に帰着する．トンネル断面は複雑な形状を有するため，有限要素法により離散近似する．トンネルの応答解 $\tilde{u}$ は次式によって表される．

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\mathbf{N}(y,z)]\sum_n\{\mathbf{U}_n\}e^{-iz_nx} \tag{6}$$

ここで，$[\mathbf{N}]$ は断面内の有限要素補間関数から成る行列，$\{\mathbf{U}_n\}$ は Fourier 級数第 n 項における節点変位ベクトルである．

また，ひずみと応力の Floquet 変換の Fourier 係数項は，それぞれ次式の様に与えられる．

$$\{\tilde{\epsilon}_n\} = [\mathbf{B}_n]\{\mathbf{U}_n\}, \{\tilde{\sigma}_n\} = [\mathbf{D}]\{\tilde{\epsilon}_n\} \tag{7}$$

ここで，$[\mathbf{B}_n]$，$[\mathbf{D}]$ は，それぞれひずみ・変位関係および応力・ひずみ関係を与える行列である．トンネルの有限要素方程式は次式で与えられる．

$$[\mathbf{K}'_n]\{\mathbf{U}_n\} = \{\mathbf{F}_n\},$$
$$[\mathbf{K}'_n] = [\mathbf{K}_n - \omega^2\mathbf{M}] \tag{8}$$

ここで，$[\mathbf{K_n}]$，$[\mathbf{M}]$ は剛性行列と質量行列である．

式 (8) の有限要素方程式を，トンネル・地盤境界節点とそれ以外とに分けて表すと次式となる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{naa} & \mathbf{K}'_{nab} \\ \mathbf{K}'_{nba} & \mathbf{K}'_{nbb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{na} \\ \mathbf{U}_{nb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{na} \\ \mathbf{F}_{nb} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

ここで，$()_b$ はトンネル・地盤境界節点に関する成分，$()_a$ はそれ以外の節点成分である．

地盤境界における地盤インピーダンス行列を $[\hat{\mathbf{K}}_n]$ とおき，次式をみたすものとして定義する．

$$[\hat{\mathbf{K}}_n]\{\mathbf{U}_{Gn}\} = \{\mathbf{F}_{Gn}\} \tag{10}$$

ここで，$\{\mathbf{U}_{Gn}\}$，$\{\mathbf{F}_{Gn}\}$ は，それぞれ地盤側の節点変位と節点力である．

トンネル・地盤境界において，次の変位の適合条件と，力のつり合い条件を課す．

$$\{\mathbf{U}_{nb}\} = \{\mathbf{G}_{Gn}\}, \quad \{\mathbf{F}_{nb}\} + \{\mathbf{F}_{Gn}\} = 0 \tag{11}$$

式 (10)，(11) を (9) に代入すると，次の求解方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{naa} & \mathbf{K}'_{nab} \\ \mathbf{K}'_{nba} & \mathbf{K}'_{nbb}+\hat{\mathbf{K}}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{na} \\ \mathbf{U}_{nb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{na} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

以上より，本問題は地盤インピーダンス行列 $[\hat{\mathbf{K}}_n]$ の導出に帰着する．

4.3 地盤インピーダンス行列の導出

地盤変位の Floquet 変換を次式のように表現する[2)]．

$$\tilde{\mathbf{u}}_G = \nabla\phi + \nabla\times\{\psi\mathbf{e}_x + \ell\nabla\times(\chi\mathbf{e}_x)\} \tag{13}$$

ここで，$\mathbf{e}_x$ は x 軸方向の単位ベクトル，ℓ は長さの次元を有するパラメータであり，値は任意である．

地盤変位 $\mathbf{u}_G$ が運動方程式をみたすために，ϕ，ψ，χ には次の波動方程式が課せられる．

$$C^2\nabla^2 f + \omega^2 f = 0 \tag{14}$$

ここで，C は地盤の縦波または横波の伝播速度 C_L，C_T の何れかである．また，f は ϕ，ψ，χ の何れかの関数であり，ϕ の場合は $C = C_L$，ϕ，χ の場合は $C = C_T$ となる．

$\mathbf{u}_G$ が式 (3) 第 1 式をみたすように，ϕ，ψ，χ を円筒座標を用いて次式により展開する．

$$f = \sum_{n,m} R_{nm}(r)e^{im\theta}e^{iz_n\tilde{x}} \tag{15}$$

ここで，R_{nm} は半径 r の関数である．

式 (15) を (14) の波動方程式に代入すると，R_{nm} がみたすべき次の常微分方程式を得る．

$$r^2\frac{d^2R_{nm}}{dr^2} + r\frac{dR_{nm}}{dr} + (r^2k_n^2 - m^2)R_{nm} = 0,$$
$$k_n^2 = \frac{\omega^2}{C^2} - z_n^2 \tag{16}$$

式 (16) をみたす R_{nm} は，次式により与えられる．

$$R_{nm} = a_{nm}(\kappa)H_m^{(2)}(k_nr) \tag{17}$$

ここで，a_{nm} は展開係数であり，ϕ，ψ，χ に対してそれぞれ ϕ_{nm}，ψ_{nm}，χ_{nm} で与えるものとする．また，$H_n^{(2)}$ は n 次の第 2 種ハンケル関数である．

式 (15)，(17) を (13) に代入すると，トンネル・地盤境界における地盤変位の Floquet 変換が次式で与えられる．

$$\tilde{\mathbf{u}}_G = \sum_{n,m}[\mathbf{U}_{nm}]\{\mathbf{\Phi}_{nm}\}e^{im\theta}e^{-iz_n\tilde{x}} \tag{18}$$

ここで，$\mathbf{u}_G = \{\tilde{u}_x,\tilde{u}_r,\tilde{u}_\theta\}$ であり，$\tilde{u}_r$，$\tilde{u}_\theta$ はそれぞれ r，θ 方向変位成分，$\{\mathbf{\Phi}_{nm}\}$ は ϕ_{nm}，ψ_{nm}，χ_{nm} を成分としたベクトル，$[\mathbf{U}_{nm}]$ は第 2 種ハンケル関数を含む 3×3 の行列である．

同様に，トンネル・地盤境界における地盤表面力成分の Floquet 変換は次式のように与えられる．

$$\tilde{\mathbf{t}}_G = -\sum_{n,m}[\mathbf{S}_{nm}]\{\mathbf{\Phi}_{nm}\}e^{im\theta}e^{-iz_n)\tilde{x}} \tag{19}$$

ここで，$\tilde{\mathbf{t}}_G = \{\tilde{t}_x,\tilde{t}_r,\tilde{t}_\theta\}$ であり，行列 $[\mathbf{S}_{nm}]$ は第 2 種ハンケル関数を含む 3×3 の行列である．

4.4 トンネル・地盤境界の結合条件

トンネル外周 S_R における有限要素変位は次式のように与えられる．

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_j[\mathbf{N}_{sj}][\mathbf{L}_j]\sum_n \mathbf{u}_{nj}e^{-iz_n\tilde{x}} \tag{20}$$

ここで，$\mathbf{u}_{nj}$ はトンネル外周上の第 j 番節点における節点変位ベクトル，$[\mathbf{N}_{sj}]$ は j 番節点に関する補間関数を対角項に配置して得られる 3×3 の対角行列である．また，$[\mathbf{L}_j]$ は j 番節点における座標変換行列である．

なお，θ_j は j 番節点における θ である．これにより変位成分は，$\{u_x, u_y, u_z\}$ から $\{u_x, u_r, u_\theta\}$ へ変換される．

以上の準備の下，地盤表面力に等価な節点力を導出する．そのために，まず式 (19) の地盤表面力と (20) より与えられる仮想変位とに対して，仮想仕事を評価すると次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\int_{-L/2}^{L/2}\int_{S_R}\delta\bar{\tilde{\mathbf{u}}}\cdot\tilde{\mathbf{t}}_G\ dsd\tilde{x} = \sum_{j,n}\delta\bar{\mathbf{u}}_{nj}\cdot\mathbf{f}_{Gnj},\\
&\mathbf{f}_{Gnj} = -L[\mathbf{L}_j^T]\sum_m\int_{S_R}[\mathbf{N}_{sj}]e^{im\theta}ds[\mathbf{S}_{nm}]\{\mathbf{\Phi}_{nm}\}
\end{aligned} \tag{21}$$

ここで，$\bar{(\cdot)}$ は複素共役，$\mathbf{f}_{Gnj}$ は地盤表面力に対応する j 番節点力である．なお，当該節点力は (x, y, z) 成分から構成されたものとなっている．

次に，式 (18)，(20) に基づき，トンネル・地盤境界 S_R におけるトンネルと地盤の変位に対して次の適合条件を課す．

$$\sum_m[\mathbf{U}_{nm}]\{\mathbf{\Phi}_{nm}\}e^{im\theta} = \sum_j[\mathbf{N}_{sj}][\mathbf{L}_j]\mathbf{u}_{nj} \tag{22}$$

式 (23) の両辺に $e^{-im\theta}$ を掛けて，S_R について積分すると次式を得る．

$$\{\mathbf{\Phi}_{nm}\} = \frac{1}{2\pi R}[U_{nm}^{-1}]\sum_j\int_{S_R}[\mathbf{N}_{sj}]e^{-im\theta}ds[\mathbf{L}_j]\mathbf{u}_{nj} \tag{23}$$

ここで，R はトンネル外周半径である．

式 (23) を (21) 第 2 式右辺に代入すると，節点力と節点変位との関係が得られ，式 (10) の関係を与えるインピーダンス行列の各節点成分が次式により与えられる．

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{K}}_{n,jl} = -\frac{L}{2\pi R}[\mathbf{L}_j^T]\sum_m[\mathbf{Q}_{jm}^*\mathbf{S}_{nm}\mathbf{U}_{nm}^{-1}\mathbf{Q}_{lm}][\mathbf{L}_l],\\
&[\mathbf{Q}_{jm}] = \int_{S_R}[\mathbf{N}_{sj}]e^{-im\theta}ds
\end{aligned} \tag{24}$$

ここで，$\hat{\mathbf{K}}_{n,jl}$ は，インピーダンス行列 $[\hat{\mathbf{K}}_n]$ の j および l 番節点に関する部分行列である．

5 解析条件

本解析では，防振まくらぎ軌道，防振マット工法，コンクリート直結軌道の 3 種類の構造を対象とする．防振まくらぎ軌道は**図-2** のようにモデル化する．防振マット工法・直結軌道では，まくらぎがコンクリート道床に直結した構造とし，レール支持部は軌道パッドのみで与える．レールは UIC60 とし，$EI = 6.3\mathrm{MN}\cdot\mathrm{m}^2$，$\rho A = 60.4\mathrm{kg/m}$ と設定した．また，軌道パッドの動的剛性は $k_r = 83\mathrm{MN/m}$(直結軌道は 30MN/m) とした．その他，まくらぎ質量 (レール 1 本分) は $m_s = 100\mathrm{kg}$ まくらぎ間隔は $L = 0.6\mathrm{m}$ とした．

防振マット工法は，RC 道床を防振マットが連続支持する構造とし，**図-1** の防振マット部分にバネ定数が $10\mathrm{MN/m}^3$ となるようにヤング率を設定する．

防振まくらぎ軌道では，**図-1** の防振マット部分をコンクリートとして設定する．防振パッドは通常使用されている中で最も低剛性のものを対象とし，動的剛性を 10MN/m パッドに設定した．

直結軌道では，防振まくらぎ軌道と同様に，**図-1** の防振マット部分をコンクリートとして設定する．また，**図-2** の防振パッドを高剛性とし，まくらぎ質量を小さく設定することで直結軌道を表現する．

6 解析結果

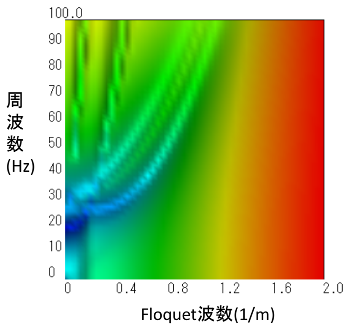
6.1 トンネル・地盤系の基本振動特性

軌道を含む連成系の加振応答特性を議論する前に，防振マット工法におけるトンネル・地盤系の基本振動特性について確認する．トンネル・地盤連成系の求解行列の絶対最小固有値を波数 (横軸)-周波数 (縦軸) 平面に描画したもの

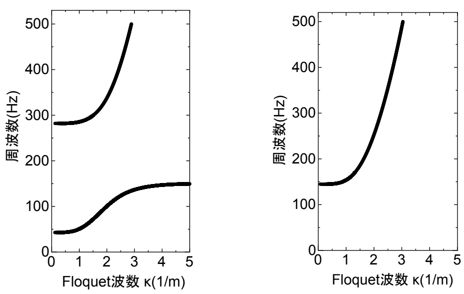
を図-**4** に示す．図-**4** より，$k=0$ において 25Hz 付近に共振点が存在している．ちなみに，剛基盤上のコンクリート道床・防振マットをバネ・質点系と見なした場合の固有振動数は約 24Hz となる．このことより，図-**4** の共振点はコンクリート道床が上下に振動するモードに相当しているものと考えられる．

6.2　軌道分散曲線

軌道の振動特性を調べるための分散曲線を，防振まくらぎ軌道と直結軌道についてそれぞれ図-**5** に示す．直結軌道では，140Hz 付近に固有モードが存在している．一方，防振まくらぎ軌道の場合，40Hz，150Hz，270Hz 付近に固有モードが存在している．前者の 2 つはまくらぎ振動に関するモードであり，後の 1 つはレール振動に関するモードである[3)]．図-**5** より，直結軌道および防振まくらぎ軌道は，それぞれ 140Hz，40Hz 付近で応答が卓越すると考えられる．ただし，本研究では車輪を定点加振する問題を考えるため，車輪を付加した系の連成応答では，車輪の質量の影響により，これらの共振周波数が低下するものと考えられる．



図–**4**　トンネル・地盤系の絶対最小固有値分布 (防振マット工法)



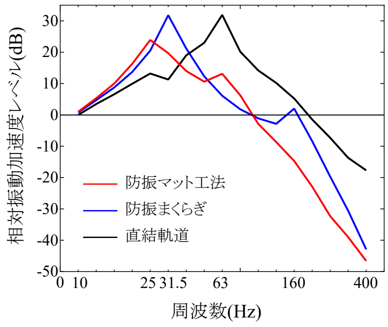
(a) 防振まくらぎ軌道　　(b) 直結軌道

図–**5**　軌道の分散曲線

6.3　トンネルの振動応答

加振位置をまくらぎ直上 ($x_p=0$) に設定し，車輪・軌道・トンネル・地盤系の加振応答解析を行った．

防振まくらぎ軌道，防振マット工法，および直結軌道における加振応答を図-**6** に示す．図-**6** は，図-**1** 中に示した「評価点」における鉛直加速度を対象に，直結軌道を 10Hz で加振した場合の応答値からの相対 dB を図示したものである．防振まくらぎ軌道および直結軌道における共振周波数は，それぞれ 31.5Hz と 63Hz 付近に現れている．これは，車輪を考慮した結果であるため，図-**5** で見られた 40Hz と 140Hz が 31.5Hz と 63Hz まで下がったことがわかる．



図–**6**　トンネル評価点における相対振動加速度の比較

これらの卓越周波数は，軌道系の振動特性に関するものである．一方，防振マット工法で 25Hz 付近に現れている卓越応答は，図-**4** で見られたコンクリート道床の共振モードに対応している．

防振まくらぎと防振マットの何れも，一般的に用いられているものを設定しているが，後者における共振周波数の方が低く，さらに単位加振に対する卓越応答値も小さい．また，軌道系に関する共振周波数 63Hz 付近を除けば，防振マット工法における応答が総じて小さいことが確認できる．以上より，防振マット工法に対して，防振まくらぎと同等またはそれ以上の振動低減効果が期待できることがわかる．

7　おわりに

防振まくらぎ軌道，防振マット工法および直結軌道を対象とした解析例を通し，軌道構造の違いが防振効果等に及ぼす影響について検討した．その結果，防振マット工法は，共振周波数が最も低く，さらに相対加速度 dB も小さく，防振効果に優れた構造であることがわかった．

参考文献

1) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G.: Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, J. Sound Vib., Vol.283, 173-199, 2005
2) Eringen, A.C. and Şuhubi, E. : Elastodynamics, Vol. ⊠, Academic Press, Inc., 1975.
3) 阿部和久，古屋卓稔，紅露一寛：まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析，応用力学論文集，Vol.10，1029 1036，2007.